Wahrscheinlichkeit und Statistik

Janis Hutz
https://janishutz.com

1. März 2026

1 Basics

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Begriff Ω ***Grundraum***, $\omega \in \Omega$ ***Elementarereignis***

D 1.1 *(Sigma-Algebra)* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra, falls:

E1. $\Omega \in \mathcal{F}$

E2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ (A Ereignis $\Rightarrow$ nicht A auch)

E3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
($A_1, \ldots$ Ereignisse $\Rightarrow A_1$ oder A_2 oder $\ldots$ ein Ereignis)

Bsp σ-Algebren bei 1x Würfeln ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, dabei $|\mathcal{F}| = 64$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$

Keine σ-Algebren sind bspw:

- $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ (Komplementärereignis $\emptyset$ fehlt, E2 verletzt)
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$
(E3 verletzt, da bspw $\{4, 5, 6\} \cup \{1\} \notin \mathcal{F}$)

1.1.1 Wahrscheinlichkeitsmass

D 1.2 *(W.M)* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ mit $A \mapsto \mathbb{P}[A]$, notiert $(\Omega, \mathcal{F})$, falls folgende Eigenschaften gelten

E1. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

E2. (σ-***Additivität***) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$,
falls $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *(disjunkte Vereinigung)*

Bsp Wieder mit Würfeln und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, sind W.M:

- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{6}$
- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i \in A} p_i$ (p_i dabei prob. Zahl i würfeln; $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$ ist für fairen Würfel)

1.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

D 1.3 *(W.R)* ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Begriff A Ereignis, ***tritt (nicht) ein*** (für ω), if $\omega \in (\notin) A$

B 1.4 $A = \varnothing$ tritt niemals ein, $A = \Omega$ immer.

1.2 Beispiele von Wahrscheinlichkeitsräumen

D 1.5 *(Laplace Modell)* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1] \overset{\text{def}}{=} \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|Q|}$, $\mathbb{P}$ ist W.M.

Bsp Auf Kreis mit $n \geq 3$ Punkten, Modell für Nachbaren ist: $A = \{\{1, 2\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ für $\Omega = \{E \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid |E| = 2\}$, also $\mathbb{P}[A] = \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}$

Bsp W. 1. mal Kopf ist bei Wurf k: $p_k = p^{k-1}(1-p)$

1.3 Eigenschaften/Interp. von Ereignissen

T 1.6 $\mathcal{F}$ σ-Algebra. Es gilt: **E4.** $\varnothing \in \mathcal{F}$

E5. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=A}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

E6. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

E7. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

A^C	A tritt ***nicht*** ein
$A \cap B$	A ***und*** B treten ein
$A \cup B$	A ***oder*** B treten ein
$A \Delta B$	entweder A ***oder*** B tritt ein
$A \subseteq B$	B tritt ein, falls A eintritt
$A \cap B = \varnothing$	A und B nicht gleichzeitig
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit A_1, A_2, A_3 paarw. disj.	$\forall \omega \in \Omega$ nur eines von A_1, A_2, A_3 kann eintreten

Wir wählen nicht immer $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, bspw. für mehrstufige Experimente ist dies nicht ideal (k. Filtern, Überabzählbarkeit)

1.4 Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsmasse

T 1.7 $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$, A Ereignis:

E1. Es gilt $\mathbb{P}[\varnothing] = 0$

E2. ***Additivität*** $k \geq 1$, $A_1, \ldots, A_k$ paarw. disj. Ereignisse:
$\mathbb{P}[A_1 \cup \cdots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \cdots + \mathbb{P}[A_k]$

E3. $\mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$

E4. B Ereignis, dann $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

1.4.1 Nützliche Ungleichungen

T 1.8 *(Monot.)* $A, B \in \mathcal{F}$, dann $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

T 1.9 *(Union Bound)* Für $A_1, A_2, \ldots$ (mögl. disj.) gilt: $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$. Auch für endl. n.-leere Ereignisse

1.4.2 Anwendungen der Ungleichungen

Sie sind nützlich für schwer zu berechnende W.

T 1.11 (A_n) mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ (mon. wachsend). Dann:

$$\lim_{n \to \infty} P[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$$

und für (B_n) mit $B_n \supseteq B_{n+1}$ (mon. fallend) gilt:
$\lim_{n \to \infty} P[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]$

B 1.12 Mit Monotonie: $\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_{n+1}]$ und $\mathbb{P}[B_n] \geq \mathbb{P}[B_{n+1}]$. Grenzwerte oben wohldefiniert.

1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

D 1.13 Für $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \quad (= \mathbb{P}[A] \text{ wenn } B \text{ eingetreten ist})$$

B 1.14 $\mathbb{P}[B|B] = 1$

T 1.15 $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, dann ist $\mathbb{P}[\cdot|B]$ ein W-Mass auf Ω

T 1.16 *(Totale W.)* $\Omega = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ mit B_is eine Partition von Ω, mit B_i paarw. disj. und $\mathbb{P}[B_i] > 0 \; \forall 1 \leq i \leq n$. Dann:

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

T 1.17 *(Bayes)* B_i wie oben, dann $\forall A$ mit $\mathbb{P}[A] > 0$:

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

1.6 Unabhängigkeit

D 1.18 $A, B \in \mathcal{F}$ ***unabh.*** falls $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

B 1.19 Falls $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$: $\forall B \in \mathcal{F} \; \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$. Falls A unabh. von sich selbst ($\mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$), dann $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$. ***Implik.***: A unabh. v. $B \Leftrightarrow A$ unabh. v. B^C

T 1.20 Sei $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Dann ist equivalent:

(i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ *(A und B unabhängig)*

(ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ *(Eintreten von B beinflusst A nicht)*

(iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ *(Eintreten von A beinflusst B nicht)*

D 1.21 I eine beliebige Menge. $(A_i)_{i \in I}$ ***unabhängig*** falls:

$$\forall j \subseteq I \text{ endlich} \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

2 Zufallsvar., Verteilungsfunktionen

2.1 Abstrakte Definition

D 2.1 *(Zufallsvariable)* kurz Z.V, ist $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt: $f = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ (notwendinge Bedingung für Wohldefiniertheit von $\mathbb{P}[f]$)

Notation Ohne ω: $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$, etc

2.2 Verteilungsfunktion

D 2.2 $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R} \to [0,1]$, def: $\forall a \in \mathbb{R} \quad F_{\mathcal{X}}(a) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \leq a]$