

Vorwissen

Def Geometrische Reihe

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Wobei $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$

Def Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

1 Wahrscheinlichkeitsräume

Def Grundraum Ω Elementarereignis $\omega \in \Omega$

Def σ -Algebra $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Ereignis $A \in \mathcal{F}$

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$
- (ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- (iii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

Lem. Abgeschlossenheit der σ -Algebra $\mathcal{F}$

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
- (ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
- (iii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
- (iv) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

Def Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F}) : \mathbb{P}$

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \quad \text{s.d.} \quad A \mapsto \mathbb{P}[A]$$

- (i) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
- (ii) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] \iff A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{s.d.} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Lem. Eigenschaften von $\mathbb{P}$

- (i) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- (ii) $\bigcap_{i=1}^k A_i = \emptyset \implies \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^k A_i\right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}[A_i]$
- (iii) $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
- (iv) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

Def Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $A \in \mathcal{F}, \omega \in \Omega$

- A tritt ein $\stackrel{\text{def}}{\iff} \omega \in A$ (i) $\emptyset$ tritt nie ein
- A tritt nicht ein $\stackrel{\text{def}}{\iff} \omega \notin A$ (ii) Ω tritt immer ein

Def Laplace Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Ω endlich.

- (i) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- (ii) $\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Lem. Nützliche Ungleichungen

- (i) $A \subseteq B \implies \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$ (Monotonie)
- (ii) $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ (Union Bound)

$A_1, A_2, \dots$ müssen *nicht* disjunkt sein.

Lem. Stetigkeit von $\mathbb{P}$ gegen ∞

- (i) $\forall n : A_n \subseteq A_{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$
- (ii) $\forall n : B_n \supseteq B_{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]$

$(A_n), (B_n)$ sind monotone Folgen von Ereignissen

1.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Def Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[A \mid B] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$A, B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}[B] > 0$

Lem. $\mathbb{P}[A|A] = 1 \quad \mathbb{P}[A] > 0$

Lem. Totale Wahrscheinlichkeit

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

$B_1, \dots, B_n$ sind eine Partition von $\Omega, \mathbb{P}[B_i] > 0$.

Lem. Bayes

$$\forall i = 1, \dots, n : \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j] \cdot \mathbb{P}[B_j]}$$

$B_1, \dots, B_n$ sind eine Partition von $\Omega, \mathbb{P}[B_i] > 0, \mathbb{P}[A] > 0$.

1.2 Unabhängigkeit

Def Unabhängigkeit

$$A, B \text{ unabhängig} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

$$\text{Notation } A \perp B \stackrel{\text{def}}{\iff} A, B \text{ unabhängig}$$

Lem. Äquivalente Aussagen zur Unabhängigkeit

- (i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ (Defintion)
- (ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ (B kein Einfluss auf A)
- (iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ (A kein Einfluss auf B)

$$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$$

Def Unabhängigkeit für Ereignismengen

$$(A_i)_{i \in I} \text{ unabhängig} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall J \subseteq I : \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

I ist eine Indexmenge. Dies muss für *alle* $J \subseteq I$ (endlich) gelten.

2 Zufallsvariablen

Def Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{s.d.} \quad \forall a \in \mathbb{R} : \left\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a \right\} \in \mathcal{F}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum

Def Indikatorfunktion

$$\forall \omega \in \Omega : \quad \mathbb{I}_A(\omega) := \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases} \quad A \in \mathcal{F}$$

Notation Ereignisse bezüglich Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \{X \leq a\} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a \right\} \\ \{a < X \leq b\} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leq b \right\} \\ \mathbb{P}[X \leq a] &= \mathbb{P}\left[\{X \leq a\}\right] \end{aligned}$$

Def Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \quad F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

$$\text{Notation } \lim_{x \rightarrow a^-} F_X(a) = F(a^-) = \mathbb{P}[X < a]$$

$$\text{Lem. } \mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$

Th. Eigenschaftern der Verteilungsfunktion

- (i) F_X monoton
- (ii) F_X rechtsstetig
- (iii) $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{a \rightarrow \infty} F_X(a) = 1$

Beispiel: Zeige, dass F eine Verteilungsfunktion ist:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{t}{4}) & t > 0 \end{cases}$$

- (i) F ist monoton wachsend, da $F'(t) = \frac{1}{4} \exp(-\frac{t}{4}) > 0 \forall t \in (-\infty, 0]$.
- (ii) F ist rechtsstetig, da F eine Komp. stetiger Funktionen ist.
- (iii) Es gilt $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$

Def Unabhängigkeit

$$X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} :$$

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \cdots \mathbb{P}[X_n \leq x_n]$$

Th. Unabhängigkeit von Gruppierungen

$X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig, dann sind auch $Y_1, \dots, Y_k$ unabhängig:

$$Y_1 = \phi_1(X_1, \dots, X_{i_1}), \dots, Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1}, \dots, X_{i_k})$$

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ sind Indizes, $\phi_1, \dots, \phi_k$ sind Abbildungen

Def Folgen von Zufallsvariablen

- (i) unabhängig $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall n \geq 1 : X_1, \dots, X_n$ unabhängig
- (ii) i.i.d $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ unabhängig, und $\forall i, j : F_{X_i} = F_{X_j}$

i.i.d = Independent & identically distributed

2.1 Diskrete Zufallsvariablen

Def Diskrete Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ diskret} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists (W \subset \mathbb{R}) \preceq \mathbb{N} : \quad \mathbb{P}[X \in W] = 1$$

bzw. die Werte von X liegen f.s. in W

Lem. Variablen diskreter Grundräume sind diskret

$$\Omega \preceq \mathbb{N} \implies X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist diskret}$$

Def Verteilung diskreter Variablen

$$\left(p(x) \right)_{x \in W} \text{ s.d. } p(x) := \mathbb{P}[X = x] \text{ heisst Verteilung}$$

X ist diskret mit $W \preceq \mathbb{N}$ $p(x)$ ist *nicht* F_X

$$\text{Th. } \forall p(x) : \quad \sum_{x \in W} p(x) = 1 \quad p(x) \text{ ist eine diskrete Verteilung}$$

Lem. Zur diskreten Verteilung existiert eine Variable

$$\forall \left(p(x) \right)_{x \in W} \in [0, 1] : \quad \exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), X \text{ mit Verteilung } p(x)$$

D.h man kann sagen: "Sei X eine Variable mit Verteilung $(p(x))_{x \in W}$ "

Th. Diskrete Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \sum_{y \leq x} p(y) \quad y \in W$$

2.2 Diskrete Verteilungen

Def Bernoulli-Verteilung $X \sim \text{Ber}(p)$

Intuitiv: Münzwurf

$$\mathbb{P}[X = 1] = p \quad \mathbb{P}[X = 0] = 1 - p$$

$$0 \leq p \leq 1, \quad W = \{0, 1\}$$

Def Binomial-Verteilung $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Intuitiv: Anzahl Erfolge bei wiederholtem Bernoulli-Experiment

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$0 \leq p \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad W = \{0, \dots, n\}$$

Th. Bernoulli-Summen sind Binomial-verteilt

$$S_n := X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(p, n)$$

$$0 \leq p \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad X_1, \dots, X_n \sim \text{Ber}(p) \text{ unabhängig}$$

Lem. $\text{Bin}(1, p) = \text{Ber}(p)$

Lem. $X_1 \sim \text{Bin}(n, p), X_2 \sim \text{Bin}(m, p) \implies X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n + m, p)$

Def Geometrische Verteilung $X \sim \text{Geom}(p)$

Intuitiv: Bernoulli Experiment erfolgreich beim k -ten Versuch

$$\mathbb{P}[X = k] = p \cdot (1 - p)^{k-1}$$

$$0 < p \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}_{\neq 0}$$

Def Negativbinomiale Verteilung $X \sim \text{NBin}(r, p)$

Intuitiv: Wartezeit zum r -ten Erfolg

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

$$r \in \mathbb{N}, \quad p \in [0, 1], \quad k \in \{r, r+1, \dots\}, \quad \text{Nur auf Folien}$$

Th. Interpretation

Für $X_1, X_2, \dots$ unabhängig s.d. $X_i \sim \text{Ber}(p)$:

$$T_r := \inf \left\{ n \geq 1 \mid \sum_{i=1}^n X_i = r \right\} \sim \text{NBin}(r, p)$$

Lem. $X_1, X_2, \dots, X_r \sim \text{Geom}(p) \implies X := \sum_{i=1}^r X_i \sim \text{NBin}(r, p)$

Def Hypergeometrische Verteilung $X \sim \text{H}(n, r, m)$

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\binom{r}{k} \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad m, r \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad k \in \{0, 1, \dots, \min(m, r)\}$$

Th. Interpretation

n Objekte in einer Urne, r von Typ 1, $n - r$ von Typ 2

Ziehe m , Sei X die Anzahl Objekte Typ 1, dann $X \sim \text{H}(n, r, m)$

Das modelliert z.B. Lotto

Def Poisson-Verteilung

Intuitiv: Sehr seltene Ereignisse

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Th. Poisson-Approximation der Binomialverteilung

$$X_n \sim \text{Bin}(\frac{\lambda}{n}), \quad N \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[N = k]$$

Intuitiv: Für grosse n haben X_n und N sehr ähnliche Eigenschaften

Remark Auch genannt: *Konvergenz in Verteilung, Schwache Konvergenz*
Convergence in distribution/law, weak convergence

2.3 Stetige Verteilungen

Def Stetig verteilte Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Intuitiv: $f_X(t)dt$ ist Die W.-keit, dass X in $[t, t + dt]$ ist

$$\exists f_X \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{s.d.} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Stetig, da F_X somit eine stetige Funktion ist

Remark f_X heisst *Dichtefunktion* von X

Th. Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilung

F_X stetig, stückweise diff.-bar $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = \infty$

$$f_X = \begin{cases} F'_X(x) & \exists k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ s.d. } x \in (x_k, x_{k+1}) \\ a_k & x \in \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \end{cases}$$

Remark f_X (Stetig) ist Intuitiv das Analogon zu p_x (Diskret)

Def Gleichverteilung $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Intuitiv: Zufälliger Punkt in $[a, b]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lem. Intervalle $\mathbb{P}[X \in [c, c + l]] = \frac{l}{b-a}$
 $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Def Exponentialverteilung $T \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$f_T(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lambda > 0$$

Lem. Eigenschaften von $T \sim \text{Exp}(\lambda)$

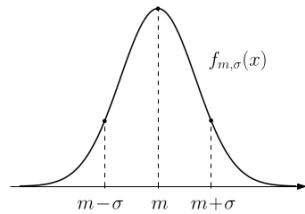
$$1. \quad \forall t \geq 0 : \quad \mathbb{P}[T > t] = e^{-\lambda t}$$

$$2. \quad \forall t, s \geq 0 : \quad \mathbb{P}[T > t + s \mid T > t] = \mathbb{P}[T > s]$$

(2) wird *Gedächtnislosigkeit* genannt.

Def Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



Lem. Summe von Normalverteilten ist normalverteilt

$X_1, \dots, X_n$ unabh. s.d. $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$

$$Z = m_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$$

$$Z \sim \mathcal{N}\left(\underbrace{m_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i}_{m_Z}, \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \sigma_i^2}_{\sigma_Z^2}\right)$$

Def Standardnormalverteilung

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \Phi(x) := \mathbb{P}[X \leq x]$$

Lem. Symmetrie $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Lem. Normalverteilung via $\mathcal{N}(0, 1)$

$Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ arbiträr, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$Z = m + \sigma \cdot X$$

Lem. Standardisierung

$Z \sim \mathcal{N}(m, \rho^2)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[x \leq Z] = \Phi\left(\frac{x-m}{\rho}\right)$$

3 Erwartungswert

Def Erwartungswert (nicht-negativ)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx$$

$X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $X(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega$

Remark $\mathbb{E}[X]$ kann unendlich sein

Th. $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \geq 0 \implies \mathbb{E}[X] \geq 0$

Gleichheit: $\mathbb{E}[X] = 0 \iff X = 0$, fast sicher

Def Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-] \quad \text{falls} \quad \mathbb{E}[|X|] < \infty$$

Remark X kein konst. Vorzeichen, nicht $\mathbb{E}[|X|] < \infty$: $\mathbb{E}[X]$ undefiniert

3.1 Diskreter Erwartungswert

Th. Diskreter Erwartungswert

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{w \in W} \phi(x) \cdot \mathbb{P}[X = x]$$

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $W \preccurlyeq \mathbb{N}$, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Ber(p)	$\mathbb{E}[X] = p$	$\mathbb{V}[X] = p(1-p)$
Poisson(λ)	$\mathbb{E}[X] = \lambda$	$\mathbb{V}[X] = \lambda$
Bin(n, p)	$\mathbb{E}[X] = n \cdot p$	$\mathbb{V}[X] = np(1-p)$
$\mathbb{I}_A$	$\mathbb{E}[\mathbb{I}_A] = \mathbb{P}[A]$	
$\exp(\lambda)$	$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$	
$\mathcal{U}([a, b])$	$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$	

3.2 Stetiger Erwartungswert

Def Erwartungswert (stetig)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ Dichtefunktion

Th. Linearität

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbb{E}[\lambda X] &= \lambda \mathbb{E}[X] \\ \text{(ii)} \quad \mathbb{E}[X + Y] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

$X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Th. Monotonie

$$X \leq Y \implies \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$$

Th. Multiplikation

X, Y unabhängig

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Th. Dichtefunktion bei Abbildungen

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt

$$f \text{ Dichte von } X \iff \mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ s.d. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Th. Unabhängigkeit (durch Abbildungen)

$\forall \phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt

$$X, Y \text{ unabh.} \iff \mathbb{E}[\phi(X)\psi(Y)] = \mathbb{E}[\phi(X)] \cdot \mathbb{E}[\psi(Y)]$$

Auch verallgemeinert für $X_1, \dots, X_n$, $\phi_1, \dots, \phi_n$

3.3 Ungleichungen

Th. Markov

$X \geq 0$, $g : X(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ wachsend

$$\forall c \in \mathbb{R} \text{ s.d. } g(c) > 0 : \quad \mathbb{P}[X \geq c] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(c)}$$

Th. Jensen

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, $\mathbb{E}[\phi(X)], \mathbb{E}[X]$ wohldefiniert

$$\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)]$$

Lem. Dreiecksungleichung

Jensen mit $\phi(X) = |X|$ und $\phi(X) = X^2$

$$|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|] \quad \mathbb{E}[|X|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

Th. Chebychev

Y s.d. $\mathbb{V}[Y] < \infty$, $c > 0$

$$\mathbb{P}[|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq c] \leq \frac{\mathbb{V}[Y]}{c^2}$$

Th. Chernoff

3.4 Varianz

Def Varianz

$\mathbb{E}[X^2] < \infty$

$$\mathbb{V}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Def Standardabweichung

$$\rho(X) := \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

Notation Auch ρ, ρ_X

Lem. Varianz (Alternativ)

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Beispiel: Bestimme $\mathbb{E}[X^2]$, wobei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 & (X \sim \text{Poisson}(\lambda)) \\ \lambda &= \mathbb{E}[X^2] - \lambda^2 \\ \lambda + \lambda^2 &= \mathbb{E}[X^2] \end{aligned}$$

Lem. Eigenschaften

- (i) $\mathbb{V}[X] \geq 0$
- (ii) $\mathbb{V}[aX] = a^2 \mathbb{V}[X]$
- (iii) $\mathbb{V}[X + a] = \mathbb{V}[X]$

Lem. Addition (Unabhängigkeit)

$X_1, \dots, X_n$ paarweise unabhängig

$$\mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}[X_k]$$

3.5 Kovarianz

Def Kovarianz

X, Y s.d. $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$

$$\text{cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Lem. Kovarianz (Alternativ)

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Remark $\text{cov}(X, X) = \mathbb{V}[X]$

Lem. Eigenschaften von cov

- (i) $\text{cov}(X, Y) \geq 0$
- (ii) $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- (iii) X, Y unabh. $\implies \text{cov}(X, Y) = 0$ Nicht umgekehrt!
- (iv) $\mathbb{V}[X \pm Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] \pm 2\text{cov}(X, Y)$
- (v) $\text{cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(X_i, Y_j)$
- (vi) $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \cdot \text{cov}(X, Y)$
- (vii) $\text{cov}\left(X, (eY + f) + (gZ + h)\right) = e\text{cov}(X, Y) + g\text{cov}(X, Z)$

Def **Kovarianzmatrix** $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$

$$\Sigma = \text{cov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{cov}(X_2, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

4 Gemeinsame Verteilungen

4.1 Gemeinsame Diskrete Verteilung

Def Gemeinsame diskrete Verteilung

$X_1, \dots, X_n$ diskret, $W_i \preccurlyeq \mathbb{N}$, $X_i \in W_i$ fast sicher

$$p := \left(p(x_1, \dots, x_n) \right)_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$$

$$p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

Th. $\sum_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n} p(x_1, \dots, x_n) = 1$

Th. Randverteilung

Die einzelnen Verteilungen p_X lassen sich extrahieren:

$\forall z \in W_i$:

$$\mathbb{P}[X_i = z] = \sum_{x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n} p(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$X_1, \dots, X_n$ diskret, gem. Vert. $p = \left(p(x_1, \dots, x_n) \right)_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$

Remark Nicht umgekehrt: Aus den Randverteilungen lässt sich nichts über die gem. Vert. schliessen.

4.2 Gemeinsame Stetige Verteilung

Def Gemeinsame Stetige Verteilung

$X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n] = \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

f heisst *gemeinsame Dichte* von $(X_1, \dots, X_n)$

Th. $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 = 1$

Umgekehrt existiert für jedes solches f ein Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Beispiel: Finde c s.d. $f_{X,Y}$ eine Dichte ist, wobei $f_{X,Y} = \begin{cases} ce^{-x} & 0 < x < y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^x ce^{-x} dy dx &= c \cdot \int_0^\infty xe^{-x} dx \\ &= c \cdot \left([-xe^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx \right) \\ &= c \cdot \left(0 + [-e^{-x}]_0^\infty \right) \\ &= c \end{aligned}$$

Also gilt wegen dem vorherigen Satz: $c = 1$.

Remark Randdichten: Integration über übrige Variablen.

Th. Erwartungswert

$$\mathbb{E}[\phi(X_1, \dots, X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \dots, x_n) \cdot f(x_1 \dots x_n) dx_n \dots dx_1$$

Th. Unabhängigkeit

$$X_1, \dots, X_n \text{ stetig, } f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

Remark Unabhängige stetige Variablen sind automatisch gemeinsam stetig

5 Grenzwertsätze

Th. Schwaches Gesetz der grossen Zahlen

$X_1, X_2, \dots$ unabh., $\forall k : \mathbb{E}[X_k] = \mu, \mathbb{V}[X_k] = \sigma^2$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n$$

Dann konvergiert $\bar{X}_n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen μ

$$\mathbb{P}[|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Intuitiv: Die Summe konvergiert zum Erwartungswert

Def Konvergenz in Verteilung

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Zufallsvariablen

$$X_n \stackrel{\text{Approx.}}{\approx} X \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Falls:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n \leq x] = \mathbb{P}[X \leq x]$$

Remark Diskrete Zufallsvariablen können zu stetigen konvergieren.

Th. Zentraler Grenzwertsatz

$(X_k)_{k \geq 1}$ i.i.d s.d. $\mathbb{E}[X_k] = \mu, \mathbb{V}[X_k] = \sigma^2, S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \right] = \Phi(x)$$

$\Phi(x)$ ist die Verteilung von $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$S_n \stackrel{\text{approx.}}{\approx} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

ZGS wird häufig zur Approximation von Summen verwendet

Def Standardisierung von S_n

$$S_n^* := \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{V}[S_n]}}$$

Im Skript auch Z_n

6 Statistik

Notation **Daten** $\{x_i\}_{i=1}^n$

Klein, in Abgrenzung zu Zufallsvariablen X_i

Notation **Parameter** $\vartheta \in \Theta$

Unbekannt, definiert den stoch. Prozess $\mathbb{P}_\vartheta$, dimension undefiniert

Def **Schätzer**

$$T_l = t_l(X_1, \dots, X_n)$$

t_l heisst Schätzfunktion, eine Auswertung $T_l(\omega)$ heisst Schätzwert

Def **Erwartungstreu**

$$T \text{ Erwartungstreu} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \vartheta \in \Theta : \mathbb{E}_\vartheta[T] = \vartheta$$

Def **Bias** $\mathbb{E}_\vartheta[T] - \vartheta$

Def **MSE** $\text{MSE}_\vartheta[T] = \mathbb{E}_\vartheta[(T - \vartheta)^2]$