Wahrscheinlichkeit und Statistik

Janis Hutz
https://janishutz.com

22. Februar 2026

1 Basics

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Begriff Ω ***Grundraum***, $\omega \in \Omega$ ***Elementarereignis***

D 1.1 *(Sigma-Algebra)* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra, falls:

E1. $\Omega \subseteq \mathcal{F}$
E2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ (A Ereignis $\Rightarrow$ nicht A auch)
E3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
($A_1, \ldots$ Ereignisse $\Rightarrow$ A_1 oder A_2 oder ... ein Ereignis)

Bsp σ-Algebren bei 1x Würfeln ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, dabei $|\mathcal{F}| = 64$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$

Keine σ-Algebren sind bspw:

- $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ (Komplementärereignis $\emptyset$ fehlt, E2 verletzt)
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$
(E3 verletzt, da bspw $\{4, 5, 6\} \cup \{1\} \notin \mathcal{F}$)

1.1.1 Wahrscheinlichkeitsmass

D 1.2 *(W.M)* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ mit $A \mapsto \mathbb{P}[A]$, notiert $(\Omega, \mathcal{F})$, falls folgende Eigenschaften gelten

E1. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
E2. (σ-***Additivität***) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$,
falls $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *(disjunkte Vereinigung)*

Bsp Wieder mit Würfeln und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, sind W.M:

- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{6}$
- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i \in A} p_i$ (p_i dabei prob. Zahl i würfeln; $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$ ist für fairen Würfel)

1.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

D 1.3 *(W.R)* ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Begriff A Ereignis, ***tritt (nicht) ein*** (für ω), if $\omega \in (\notin) A$

B 1.4 $A = \varnothing$ tritt niemals ein, $A = \Omega$ immer.

1.2 Beispiele von Wahrscheinlichkeitsräumen

D 1.5 *(Laplace Modell)* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1] \overset{\text{def}}{=} \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$, $\mathbb{P}$ ist W.M.

Bsp Auf Kreis mit $n \geq 3$ Punkten, Modell für Nachbaren ist: $A = \{\{1, 2\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ für
$\Omega = \{E \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid |E| = 2\}$, also $\mathbb{P}[A] = \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}$

Bsp W. 1. mal Kopf ist bei Wurf k: $p_k = p^{k-1}(1 - p)$

1.3 Eigenschaften/Interp. von Ereignissen

T 1.6 $\mathcal{F}$ σ-Algebra. Es gilt: **E4.** $\varnothing \in \mathcal{F}$

E5. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=A}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
E6. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$
E7. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

A^C	A tritt ***nicht*** ein
$A \cap B$	A ***und*** B treten ein
$A \cup B$	A ***oder*** B treten ein
$A \Delta B$	entweder A ***oder*** B tritt ein
$A \subseteq B$	B tritt ein, falls A eintritt
$A \cap B = \varnothing$	A und B nicht gleichzeitig
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit A_1, A_2, A_3 paarw. disj.	$\forall \omega \in \Omega$ nur eines von A_1, A_2, A_3 kann eintreten

Wir wählen nicht immer $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, bspw. für mehrstufige Experimente ist dies nicht ideal (k. Filtern, Überabzählbarkeit)

1.4 Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsmasse

T 1.7 $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$, A Ereignis:

E1. Es gilt $\mathbb{P}[\varnothing] = 0$
E2. ***Additivität*** $k \geq 1$, $A_1, \ldots, A_k$ paarw. disj. Ereignisse:
$\mathbb{P}[A_1 \cup \cdots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \cdots + \mathbb{P}[A_k]$
E3. $\mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$
E4. B Ereignis, dann $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

1.4.1 Nützliche Ungleichungen

T 1.8 *(Monot.)* $A, B \in \mathcal{F}$, dann $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

T 1.9 *(Union Bound)* Für $A_1, A_2, \ldots$ (mögl. disj.) gilt: $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$. Auch für endl. n.-leere Ereignisse

1.4.2 Anwendungen der Ungleichungen

2 Zufallsvar., Verteilungsfunktionen

2.1 Abstrakte Definition