Wahrscheinlichkeit und Statistik

Janis Hutz
https://janishutz.com

22. April 2026

1 Basics

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Begriff Ω ***Grundraum***, $\omega \in \Omega$ ***Elementarereignis***

Def *(Sigma-Algebra)* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra, falls:

E1. $\Omega \in \mathcal{F}$

E2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ (A Ereignis $\Rightarrow$ nicht A auch)

E3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
($A_1, \ldots$ Ereignisse $\Rightarrow$ A_1 oder A_2 oder $\ldots$ ein Ereignis)

Bsp σ-Algebren bei 1x Würfeln ($\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$)

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2,3,4,5,6\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, dabei $|\mathcal{F}| = 64$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \Omega\}$

Keine σ-Algebren sind bspw:

- $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ (Komplementärereignis $\emptyset$ fehlt, E2 verletzt)
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{1\}, \{2,3,4,5,6\}, \Omega\}$
(E3 verletzt, da bspw $\{4,5,6\} \cup \{1\} \notin \mathcal{F}$)

1.1.1 Wahrscheinlichkeitsmass

Def *(W.M)* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ mit $A \mapsto \mathbb{P}[A]$, notiert $(\Omega, \mathcal{F})$, falls folgende Eigenschaften gelten

E1. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

E2. (σ-***Additivität***) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$,
falls $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *(disjunkte Vereinigung)*

Bsp Wieder mit Würfeln und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, sind W.M:

- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{6}$
- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i \in A} p_i$ (p_i dabei prob. Zahl i würfeln; $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$ ist für fairen Würfel)

1.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

Def *(W.R)* ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Begriff A Ereignis, ***tritt (nicht) ein*** (für ω), if $\omega \in (\notin) A$

Bem $A = \varnothing$ tritt niemals ein, $A = \Omega$ immer.

1.2 Beispiele von Wahrscheinlichkeitsräumen

Def *(Laplace Modell)* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] \overset{\text{def}}{=} \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$, $\mathbb{P}$ ist W.M.

Bsp Auf Kreis mit $n \geq 3$ Punkten, Modell für Nachbaren ist: $A = \{\{1,2\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ für
$\Omega = \{E \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid |E| = 2\}$, also $\mathbb{P}[A] = \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}$

Bsp W. 1. mal Kopf ist bei Wurf k: $p_k = p^{k-1}(1-p)$

1.3 Eigenschaften/Interp. von Ereignissen

T $\mathcal{F}$ σ-Algebra. Es gilt: **E4.** $\varnothing \in \mathcal{F}$

E5. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=A}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

E6. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

E7. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

A^C	A tritt ***nicht*** ein
$A \cap B$	A ***und*** B treten ein
$A \cup B$	A ***oder*** B treten ein
$A \Delta B$	entweder A ***oder*** B tritt ein
$A \subseteq B$	B tritt ein, falls A eintritt
$A \cap B = \varnothing$	A und B nicht gleichzeitig $\forall \omega \in \Omega$
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit A_1, A_2, A_3 paarw. disj.	nur eines von A_1, A_2, A_3 kann eintreten

Wir wählen nicht immer $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, bspw. für mehrstufige Experimente ist dies nicht ideal (k. Filtern, Überabzählbarkeit)

1.4 Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsmasse

T $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$, A Ereignis:

E1. Es gilt $\mathbb{P}[\varnothing] = 0$

E2. ***Additivität*** $k \geq 1$, $A_1, \ldots, A_k$ paarw. disj. Ereignisse:
$\mathbb{P}[A_1 \cup \cdots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \cdots + \mathbb{P}[A_k]$

E3. $\mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$

E4. B Ereignis, dann $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

1.4.1 Nützliche Ungleichungen

T *(Monot.)* $A, B \in \mathcal{F}$, dann $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

T *(Union Bound)* Für $A_1, A_2, \ldots$ (mögl. disj.) gilt: $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$. Auch für endl. n.-leere Ereignisse

1.4.2 Anwendungen der Ungleichungen

Sie sind nützlich für schwer zu berechnende W.

T (A_n) mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ (mon. wachsend). Dann:
$$\lim_{n \to \infty} P[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$$
und für (B_n) mit $B_n \supseteq B_{n+1}$ (mon. fallend) gilt:
$\lim_{n \to \infty} P[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]$

Bem Mit Monotonie: $\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_{n+1}]$ und $\mathbb{P}[B_n] \geq \mathbb{P}[B_{n+1}]$. Grenzwerte oben wohldefiniert.

1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Def Für $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$:
$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \quad (= \mathbb{P}[A] \text{ wenn } B \text{ eingetreten ist})$$

Bem $\mathbb{P}[B|B] = 1$

T $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, dann ist $\mathbb{P}[\cdot|B]$ ein W-Mass auf Ω

T *(Totale W.)* $\Omega = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ mit B_is eine Partition von Ω, mit B_i paarw. disj. und $\mathbb{P}[B_i] > 0 \; \forall 1 \leq i \leq n$. Dann:
$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

T *(Bayes)* B_i wie oben, dann $\forall A$ mit $\mathbb{P}[A] > 0$:
$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

1.6 Unabhängigkeit

Def $A, B \in \mathcal{F}$ ***unabh.*** falls $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

Bem Falls $\mathbb{P}[A] \in \{0,1\}$: $\forall B \in \mathcal{F} \; \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$. Falls A unabh. von sich selbst ($\mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$), dann $\mathbb{P}[A] \in \{0,1\}$. ***Implik.***: A unabh. v. $B \Leftrightarrow A$ unabh. v. B^C

T Sei $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Dann ist equivalent:

(i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ *(A und B unabhängig)*

(ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ *(Eintreten von B beinflusst A nicht)*

(iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ *(Eintreten von A beinflusst B nicht)*

Def I eine beliebige Menge. $(A_i)_{i \in I}$ ***unabhängig*** falls:
$$\forall j \subseteq I \text{ endlich} \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

2 Zufallsvar., Verteilungsfunktionen

2.1 Abstrakte Definition

Def *(Zufallsvariable)* kurz Z.V, ist $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt: $f = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ (notwendinge Bedingung für Wohldefiniertheit von $\mathbb{P}[f]$)

Notation Ohne ω: $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$, etc

2.2 Verteilungsfunktion

Def $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R} \to [0,1]$, def: $\forall a \in \mathbb{R} \quad F_{\mathcal{X}}(a) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \leq a]$

T $a < b \in \mathbb{R}$. Dann: $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$

T $\mathcal{X}$ Z.V. auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und V.F. $F = F_{\mathcal{X}}$. Eig.:

1. F ist monoton wachsend
2. F ist rechtsseitig $(F(a) = \lim_{h \downarrow 0} F(a+h) \; \forall a \in \mathbb{R})$
3. $\lim\limits_{a \to -\infty} F(a) = 0$ und $\lim\limits_{a \to \infty} F(a) = 1$

2.3 Unabhängigkeit

Def Z.V. $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ sind ***unabh.*** falls $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \leq x_1, \ldots, \mathcal{X}_n \leq x_n] = \mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \leq x_1] \cdots \mathbb{P}[\mathcal{X}_n \leq x_n]$

Bem Alternativ: ZVs unabhängig, falls $\forall I_1 \subseteq \mathbb{R}, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle $\{\mathcal{X}_1 \in I_1\}, \ldots, \{\mathcal{X}_n \in I_n\}$ unabhängig

2.3.1 Gruppierung

T n ZV $\mathcal{X}_i$ und $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ sind indizes und $\phi_1, \ldots, \phi_k$ Abbildungen. Dann sind unabhängig:
$Y_1 = \phi_1(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_{i_1}), \ldots, Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1}, \ldots, X_{i_k})$

2.3.2 Unabhängig identisch verteilte ZV

Def Eine Folge von ZV ist ***(1)*** unabh. falls X_i unabh. sind und ***(2)*** uiv, falls unabh. und die ZV dieselbe Verteilungsf. haben, also: $\forall i, j \quad F_{\mathcal{X}_i} = F_{\mathcal{X}_j}$

2.4 Transformation von Zufallsvariablen

Da ZV Funk. $\Omega \to \mathbb{R}$ sind, mit komposition neue ZV aus and. ZV, bspw: $Z_1 = \exp(\mathcal{X}_1)$ oder $Z_2 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$

2.5 Konstruktion von Zufallsvariablen

Def *(Bernoulli ZV)* mit param. $p \in [0,1]$ falls $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 0] = 1 - p$ und $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$. Not.: $\mathcal{X} \sim$ Ber(p)

T *($\exists$-T v. Kolmogorov)* $\exists$ W-Raum und n. endl. uiv Folge von $\mathcal{X}_i \sim$ Ber $\left(\frac{1}{2}\right)$

Def ZV U heisst ***gleichverteilt auf*** $[0, 1]$, falls

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$. Wir schreiben $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

T $\mathcal{X}_i$ wie oben, da $\mathcal{X}_i(\omega) \in \{0,1\}$ konvergiert $\mathcal{Y}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathcal{X}_n(\omega)$ absolut, mit $\mathcal{Y}(\omega) \in [0,1]$. $\mathcal{Y} \sim \mathcal{U}([0,1])$

Def *(Pseudoinverse)* von F ist $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$. Def: $\forall \alpha \in (0,1) \quad F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\}$

T *(Inversionsmethode)* F erfüllt eig. v. T2.4, $U \sim \mathcal{U}(\ldots)$, dann hat ZV $X = F^{-1}(U)$ die Verteilfunk. $F_X = F$

Bem X wohldefiniert mit $X(\omega) = F^{-1}(U(\omega))$ falls $U(\omega) \in (0,1)$ und $X(\omega) = 0$ sonst.

T $F_1, \ldots$ Folge von Funk. mit eig. v. T2.4. Dann $\exists$ W-Raum und Folge von unabhängigen ZV X_i, sodass:

- $\forall i \; X_i$ has F_i (also $\forall x \; \mathbb{P}[X_i \leq x] = F_i(x)$)
- $X_1, X_2, \ldots$ sind unabhängig.

3 Diskrete und stetige ZV

3.1 Stetigkeit der Verteilungsfunktion

T *(W. Punkt)* Für Z.V $\mathcal{X}$ und V.F $F_{\mathcal{X}}$ gilt $\forall a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}[\mathcal{X} = a] = F(a) - F(a-)$ mit $F(a-) := \lim\limits_{h \downarrow 0} F(a-h)$.

$\to$ F in a n. stetig, dann "Sprunghöhe" $F(a) - F(a-) = \mathbb{P}[\mathcal{X} = a]$

$\to$ F stetig in a, dann $\mathbb{P}[\mathcal{X} = a] = 0$

3.2 Fast sichere Ereignisse

Def $A \in \mathcal{F}$ tritt ***fast sicher*** (f.s.) ein, falls $\mathbb{P}[A] = 1$.

Bem Für allg. Mengen: A f.s., falls $\exists A' \subseteq A \mid \mathbb{P}[A'] = 1$

3.3 Diskrete Zufallsvariablen

Def Z.V. $\mathcal{X}$ ist ***diskret***, falls endl. oder abzählb. Menge $W \subsetneq \mathbb{R}$ existiert, s.d. $\mathbb{P}[\mathcal{X} \in W] = 1$ (Werte v. $\mathcal{X}$ f.s. in W)

Bem Falls der Grundraum Ω endlich oder abzählbar ist, dann ist jede Z.V. $\mathcal{X}$ diskret.

Def *(Verteilung)* Für Z.V. $\mathcal{X}$ mit W endl. oder abzählb. $(p(x))_{x \in W} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in W \; p(x) := \mathbb{P}[\mathcal{X} = x]$

T $(p(x))_{x \in W} = \sum_{x \in W} p(x) = 1$

Bem $\forall (p(x))_{x \in W}$ $\exists$ Z.V. mit dieser Verteilung. Können desh. schreiben: "Sei $\mathcal{X}$ disk. Z.V. mit Verteilung $(p(x))_{x \in W}$"

3.3.1 Zusammenhang Verteilung, Verteilungsfunktion

T $\mathcal{X}$ disk. Z.V. wie oben, dann ist Verteilungsfunktion: $\forall x \in \mathbb{R} \; F_{\mathcal{X}}(x) = \sum_{\substack{y \in W \\ y \leq x}} p(y)$. **Umgekehrt:** $p(x)$ ist die "Sprunghöhe" im Punkt $x \in W$, W pos. Sprünge in $F_{\mathcal{X}}$

3.4 Verteilungen

3.4.1 Bernoulli-Verteilung

Def $\mathcal{X} \sim$ Ber(p): $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 0] = 1 - p$ und $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$

3.4.2 Binomialverteilung

Def $\mathcal{X} \sim$ Bin(n,p), falls $\forall k \in \{0, \ldots, n\} \; \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Bem $\sum_{k=0}^{n} p(k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = (p + 1 - p)^n = 1$

T $X_i \sim$ Ber(p_i) unab: $(S_n := \sum_{i=0}^{n} X_i) \sim$ Ber(n,p)

Bem Bin$(1,p)$ ist Ber(p) verteilt. Für $X, Y \sim$ Bin(n_i, p) mit X, Y unabhängig dann ist $X + Y \sim$ Bin$(n_1 + n_2, p)$

3.4.3 Geometrische Verteilung

Warten auf den ersten Erfolg (in ∞ Folge von Bernoulli-Experimenten)

Def $\mathcal{X} \sim$ Geom(p) mit $W = \mathbb{N} \backslash \{0\}$ falls $\forall k \in W \; \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = (1-p)^{k-1} \cdot p$

Bem $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$, da wir Konvetion $a^0 = 1$ verwenden.

Bem $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$

T $X_i \sim$ Ber(p) für $i \in \mathbb{N}$.
Dann $(T := \min\{n \geq 1 \mid X_n = 1\}) \sim$ Geom(p)

Bem $T = \infty$ ist möglich, $\mathbb{P}[T = \infty] = 0$

T $T \sim$ Geom(p), dann $\forall n \geq 0 \; \forall k \geq 1 \; \mathbb{P}[T \geq n + k \mid T > n] = \mathbb{P}[T \geq k]$

3.4.4 Negativbinomiale Verteilung

Warten auf den r-ten Erfolg (in ∞ Folge von Bernoulli-Experimenten)

Def $\mathcal{X} \sim$ NBin(r,p), falls

$$\forall k \in \{r, r+1, \ldots\} \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

T $\mathcal{X}_i \sim$ Ber(p), dann $T_r := \inf \left\{ n \geq 1 \,\middle|\, \sum_{l=1}^{n} \mathcal{X}_l = r \right\} \sim$ NBin(r,p)

Bem $\mathcal{X} := \sum_{i=1}^{r} \mathcal{X}_i \sim$ NBin(r,p) für $\mathcal{X}_i \sim$ Geom(p)

3.4.5 Hypergeometrische Verteilung

r Elemente vom Typ I, $n - r$ El. vom Typ II, m davon gezogen, ohne Zurücklegen

Def $\mathcal{X} \sim$ H(n,r,m), falls

$$\forall k \in \{0, \ldots, \min(m,r)\} \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

3.4.6 Poisson-Verteilung

Def $\mathcal{X} \sim$ Poisson(λ) mit $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$, falls $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

T Für $n \in \mathbb{N}$ Z.V. $\mathcal{X}_i \sim$ Bin $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ und $\mathcal{N} \sim$ Poisson(λ): $\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}[\mathcal{X}_i = k] = \mathbb{P}[\mathcal{N} = k]$

3.5 Stetige Zufallsvariablen

Def *(Stetig verteilte Z.V)* $\mathcal{X}$ stetig, falls $\exists f_\mathcal{X} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, s.d. V.F. $F_\mathcal{X}(x) = \int_{-\infty}^x f_\mathcal{X}(t)\, \mathrm{d}t$. $f_\mathcal{X}$ ist Dichte (pdf) von $\mathcal{X}$

T Sei $F_\mathcal{X}$ st. stückw. diff. auf Partition $-\infty = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \infty$. Dann $\mathcal{X}$ stetig, mit a_k beliebig und

$$f_\mathcal{X} = \begin{cases} F'_\mathcal{X}(x) & \exists k \in \{0,1,\ldots,n-1\} : x \in (x_k, x_{k+1}) \\ a_k & x \in \{x_1,\ldots,x_{n-1}\} \end{cases}$$

Bem $f_\mathcal{X}$ fast analog zu Gew.F $p_\mathcal{X}$. Also: $(\Sigma, p_\mathcal{X}) \mapsto (\int, f_\mathcal{X})$ vom diskreten zu stetigen Fall

3.6 Stetige Verteilungen

3.6.1 Gleichverteilung

Def $\mathcal{X} \sim \mathcal{U}([a,b])$, falls $f_\mathcal{X} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Bem $\mathbb{P}[\mathcal{X} \in [c, c+l]] = \frac{l}{b-a}$, $F_\mathcal{X}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$

3.6.2 Exponentialverteilung

Wie Geomemtrische Verteilung warten auf Erfolg

Def $\mathcal{X} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, falls $\forall x \in \mathbb{R} f_\mathcal{X}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Bem *(Gedächtnisl.)* $\mathbb{P}[\mathcal{X} > t + s \mid \mathcal{X} > s] = \mathbb{P}[\mathcal{X} > t]$

Bem *(Verteilungsfunktion)* $F_\mathcal{X}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

3.6.3 Cauchy-Verteilung

Def $\mathcal{X} \sim \mathrm{Cauchy}(x_0, \gamma)$, falls $f_\mathcal{X}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - x_0)^2}$

Bem *(Verteilungsfunk.)* $F_\mathcal{X}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)$

Def *(Langschwänzige Verteilung)* für $|x| \to \infty$ nur sehr langsam gegen 0 (quadratisch vs. exponentiell bei Norm. V)

3.6.4 Normalverteilung

Def $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ falls $f_\mathcal{X}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, mit σ Standardabweichung. Auch: Gauss'sche Verteilung

Def *(Standardnormalverteilung)* $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$\Phi = \int_{-\infty}^x \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{-t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$ mit $\varphi = f_\mathcal{X}$.

Es gilt: $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$

T $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann $\frac{\mathcal{X}-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, also:

$$F_\mathcal{X}(x) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \le x] = \mathbb{P}\left[\frac{\mathcal{X} - \mu}{\sigma} \le \frac{x - \mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Bsp für Phänomene modellierbar mit Normalverteilung:

- Streuung von Messwerten um Mittelwert
- Grösse und Gewicht der Bevölkerung
- Renditen von Aktien

Bem Für $\mathcal{X}_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ unabhängig gilt:

$$\mathcal{Y} := \mu_0 + \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{X}_k \sim \mathcal{N}\left(\mu_0 + \sum_{k=1}^n a_k \mu_k, \sum_{k=1}^n a_k^2 \sigma_k^2\right)$$

Bem Für $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ und $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ gilt $\mu + \sigma\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (nützlich für Simulation)

Bem $\mathbb{P}[|\mathcal{X} - \mu| \ge 3\sigma] \le 0.0027$

4 Erwartungswert

4.1 Allgemeiner Erwartungswert

Def Für $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \int_0^\infty (1 - F_\mathcal{X}(x))\, \mathrm{d}x$

Bem $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ immer definiert und endlich oder unendlich

T $\mathcal{X}$ n.-neg. Dann: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] \ge 0$. $=$, wenn $\mathcal{X} = 0$ fast sicher

Def $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \mathbb{E}[\mathcal{X}_+] - \mathbb{E}[\mathcal{X}_-]$ mit $\mathcal{X}_-$ auch n.-neg.

Bem $|\mathcal{X}| = \mathcal{X}_+ + \mathcal{X}_-$. Für $\mathcal{X} \ge 0$ ist $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ immer definiert. Falls $\mathcal{X}$ kein konst. Vorzeichen, $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ undef.

Bem $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \int_0^\infty (1 - F_\mathcal{X}(x))\, \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 F_\mathcal{X}(x)$

4.2 Diskrete Zufallsvariablen

T Für $\mathcal{X}$ mit Werten fast sicher in W:

$$\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \sum_{x \in W} x \cdot \mathbb{P}[\mathcal{X} = x] = \sum_{x \in W} x \cdot p_\mathcal{X}(x)$$

Bem $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ wohldefiniert falls $(x \cdot p_\mathcal{X}(x))_{x \in W}$ abs. konv.

4.2.1 Beispiele

- $\mathcal{X} \sim \mathrm{Ber}(p)$: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = p$
- $\mathcal{X} \sim \mathrm{Bin}(n,p)$: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = np$
- $\mathcal{X} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \lambda$

4.2.2 Transformierte Zufallsvariablen

T Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[\varphi(\mathcal{X})] = \sum_{x \in W} \varphi(x) \cdot \mathbb{P}[\mathcal{X} = x]$

4.3 Stetige Zufallsvariablen

Def $\mathcal{X}$ stetig $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \int_{-\infty}^\infty x f_\mathcal{X}(x)\, \mathrm{d}x$

T $\mathbb{E}[\varphi(\mathcal{X})] = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x) f_\mathcal{X}(x)\, \mathrm{d}x$, falls int. wohldefiniert

4.3.1 Beispiele

L *(Int über gauss. Glockenk.)* $\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi\sigma^2}$

- $\mathcal{X} \sim \mathcal{U}([a,b])$, $a < b$: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{a+b}{2}$
- $\mathcal{X} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \mu$
- $\mathcal{X} \sim \mathrm{Cauchy}(x_0, \gamma)$: Existiert nicht (Int. ∞) $\mathbb{E}[\mathcal{X}_+] = \mathbb{E}[\mathcal{X}_-] = \infty$, Median: 0

4.4 Eigenschaften des Erwartungswerts

T *(Linearität)* Falls $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ und $\mathbb{E}[\mathcal{Y}]$ wohldefiniert: $\mathbb{E}[\lambda\mathcal{X}] = \lambda\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ und $\mathbb{E}[\mathcal{X} + \mathcal{Y}] = \mathbb{E}[\mathcal{X}] + \mathbb{E}[\mathcal{Y}]$

Bem Z.V $\mathcal{X}_k$ und λ_k: $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathcal{X}_k] = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{E}[\mathcal{X}_k]$

T *(Monotonie)* Sei $\mathcal{X} \le \mathcal{Y}$ mit $\mathbb{E}$ wohldef.: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] \le \mathbb{E}[\mathcal{Y}]$

T $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ unabh., dann $\mathbb{E}[\mathcal{X}\mathcal{Y}] = \mathbb{E}[\mathcal{X}]\mathbb{E}[\mathcal{Y}]$

T $\mathcal{X}_k$ alle unabhängig mit $\mathbb{E}[\mathcal{X}_k]$ endlich. Dann gilt $\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n \mathcal{X}_k\right] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathcal{X}_k]$

T $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, \mathrm{d}x = 1$. Dann ist äquivalent: ***(1)*** $\mathcal{X}$ stetig mit Dichte f und ***(2)*** für jede stückweise stetige Abb. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[\varphi(\mathcal{X})] = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x) f(x)\, \mathrm{d}x$

T äquivalent: ***1*** $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ unabhängig, für alle $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\mathbb{E}[\varphi(\mathcal{X})\psi(\mathcal{X})] = \mathbb{E}[\varphi(\mathcal{X})]\mathbb{E}[\psi]$

T äquivalent: ***(1)*** $\mathcal{X}_i$ unabhängig, ***(2)*** $\forall \varphi_i$: $\mathbb{E}[\varphi_1(\mathcal{X}_1) \cdots \varphi_n(\mathcal{X}_n)] = \mathbb{E}[\varphi_1(\mathcal{X}_1)] \cdots \mathbb{E}[\varphi_n(\mathcal{X}_n)]$

4.5 Ungleichungen

T *(Markow)* $\mathcal{X}$ n.-neg., $g : \mathcal{X}(\Omega) \to [0, \infty)$. $\forall c \in \mathbb{R}$ mit $g(c) > 0$ gilt $\mathbb{P}[\mathcal{X} \ge c] = \frac{\mathbb{E}[g(\mathcal{X})]}{g(c)}$

T *(Jensensche)* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, und falls $\mathbb{E}[\varphi(\mathcal{X})]$ und $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ wohldefiniert: $\varphi(\mathbb{E}[\mathcal{X}]) \le \mathbb{E}[\varphi(\mathcal{X})]$

T *(Dreieck)* $\varphi(x) = |x|$, dann $|\mathbb{E}[\mathcal{X}]| \le \mathbb{E}[|\mathcal{X}|]$. $\varphi(x) = x^2$, dann $\mathbb{E}[|\mathcal{X}|] \le \sqrt{\mathbb{E}[\mathcal{X}^2]}$

4.6 Varianz

Def $\mathcal{X}$ mit $\mathbb{E}[\mathcal{X}^2] < \infty$, $\mathbb{V}[\mathcal{X}] = \mathbb{E}[(\mathcal{X} - \mathbb{E}[\mathcal{X}])^2]$

Def *(Standardabweichung)* $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{\mathbb{V}[\mathcal{X}]}$

Bem $\mathbb{V}[\mathcal{X}] = \mathbb{E}[\mathcal{X}^2] - \mathbb{E}[\mathcal{X}]^2$

Bsp $\mathcal{X}$ determ. Z.V ($=$ konst) mit Wert a, also $\mathcal{X} = a1_\Omega$. Dann: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = a\mathbb{E}[1_\Omega] = a\mathbb{P}[\Omega] = a$ und $\mathbb{V}[\mathcal{X}] = \mathbb{E}[\mathcal{X}^2] - \mathbb{E}[\mathcal{X}]^2 = a^2\mathbb{E}[1_\Omega] - a^2 = 0$

Bem $\mathbb{E}[\mathcal{X}] < \infty$, dann $\mathbb{V}[\mathcal{X}] \ge 0$ mit $=$ g.d.w. $\mathcal{X}$ konst; zudem $\mathbb{V}[a\mathcal{X}] = a^2\mathbb{V}[\mathcal{X}]$ und $\mathbb{V}[\mathcal{X} + a] = \mathbb{V}[\mathcal{X}]$

Prop $\mathcal{X}_k$ paarw. unabh. $\mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^n \mathcal{X}_k\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}[\mathcal{X}_k]$

Bsp Varianz von bekannten Verteilungen

- $\mathcal{X} \sim \mathrm{Ber}(p)$, $\mathbb{V}[\mathcal{X}] = p(1-p)$
- $\mathcal{X} \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $\mathbb{V}[\mathcal{X}] = np(1-p)$
- $\mathcal{X} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, $\mathbb{V}[\mathcal{X}] = \lambda = \mathbb{E}[\mathcal{X}]$
- $\mathcal{X} \sim \mathcal{U}([a,b])$, $\mathbb{V}[\mathcal{X}] = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mathbb{V}[\mathcal{X}] = \sigma^2$

K *(Cheb.)* $\mathbb{V}[\mathcal{Y}]$ end. $\forall c > 0$ gilt: $\mathbb{P}[|\mathcal{Y} - \mathbb{E}[\mathcal{Y}]| \ge c] \le \frac{\mathbb{V}[\mathcal{Y}]}{c^2}$

4.7 Kovarianz

Def cov$(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathbb{E}[(\mathcal{X}-\mathbb{E}[\mathcal{X}])(\mathcal{Y}-\mathbb{E}[\mathcal{Y}])]$

Bem cov$(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathbb{E}[\mathcal{X}\mathcal{Y}] - \mathbb{E}[\mathcal{X}]\mathbb{E}[\mathcal{Y}]$

Bem cov$(\mathcal{X},\mathcal{X}) = \mathbb{V}[\mathcal{X}]$

Bem cov$(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = 0 \Longrightarrow \mathcal{X},\mathcal{Y}$ unabh. ($\Leftarrow$ impl. falsch!)

Bem $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ unabh. $\overset{\forall\varphi,\psi \text{ stückweise stetig, beschränkt gilt}}{\underset{\text{cov}(\varphi(\mathcal{X}),\psi(\mathcal{Y}))=0}{\Longleftrightarrow}}$

Bem Folgende Terminologie (neg. korr. = antikorreliert):

- Wenn cov$(\mathcal{X},\mathcal{Y}) > 0$, dann: $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ ***positiv korreliert***
- Wenn cov$(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = 0$, dann: $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ ***unkorreliert***
- Wenn cov$(\mathcal{X},\mathcal{Y}) < 0$, dann: $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ ***negativ korreliert***

Bsp $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ unkorreliert $\not\Rightarrow$ $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ unabhängig

Bem Eigenschaften der Kovarianz (alle $a,\ldots \in \mathbb{R}$):

- ***Positive Semidefinitheit***: cov$(\mathcal{X},\mathcal{X}) \geq 0$
- ***Symmetrie***: cov$(\mathcal{X},\mathcal{Y}) =$ cov$(\mathcal{Y},\mathcal{X})$
- ***Bilin.***: cov$(a\mathcal{X}+b, c\mathcal{Y}+d) = accov(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ und cov$(\mathcal{X},(e\mathcal{Y}+f)+(g\mathcal{Z}+h)) = ecov(\mathcal{X},\mathcal{Y}) + gcov(\mathcal{X},\mathcal{Z})$

Bem $\mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^{n} \mathcal{X}_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}[\mathcal{X}]_k + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} \text{cov}(\mathcal{X}_k,\mathcal{X}_l)$

Bem In Matrix-Notation für $\boldsymbol{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_n)^\top$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[\mathcal{X}_1] & \text{cov}(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2) & \ldots & \text{cov}(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_n) \\ \text{cov}(\mathcal{X}_2,\mathcal{X}_1) & \mathbb{V}[\mathcal{X}_2] & \ldots & \text{cov}(\mathcal{X}_2,\mathcal{X}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \text{cov}(\mathcal{X}_n,\mathcal{X}_1) & \text{cov}(\mathcal{X}_n,\mathcal{X}_2) & \ldots & \mathbb{V}[\mathcal{X}_n] \end{pmatrix}$$

5 Gemeinsame Verteilungen

5.1 Gemeinsame Diskrete Verteilung

Def $\mathcal{X}_i$ mit Mengen $W_k \subseteq \mathbb{R}$ endlich oder abzählbar mit $\mathcal{X}_k \in W_k$ fast sicher. Die gemeinsame Verteilung (*Joint probability distribution*) von $(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_n)$ ist Familie von W.:

$$\{p(x_1,\ldots,x_n)\}_{x_1\in W_1,\ldots,x_n\in W_n}$$

mit $p:\mathbb{R}^n \to [0,1]$ die gemeinsame Gewichtsfunktion (joint probability mass function) mit

$$p(x_1,\ldots,x_n) = \mathbb{P}[\mathcal{X}_1 = x_1,\ldots,\mathcal{X}_n = x_n]$$

T Gemeinsame Verteilung von $\mathcal{X}_i$ erfüllt stets

$$\sum_{x_1\in W_1,\ldots,x_n\in W_n} p(x_1,\ldots,x_n) = 1$$

Bem Umgekehrt: Für endliche oder abzählbare W_i und Funktion $p: W_1\times\ldots\times W_n \to [0,1]$, die obiges erfüllen, gibt es W-Raum mit Verteilung p

Prop Aus p Verteilungsfunktion (analog zu ZH $F_\mathcal{X}$ & $p_\mathcal{X}$):

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \leq x_1,\ldots,\mathcal{X}_n \leq x_n] = \sum_{y_1\leq x_1,\ldots,y_n\leq x_n} p(y_1,\ldots,y_n)$$

T *(Verteilung Bild)* Sei $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\mathcal{X}_i$ disk. Z.V. mit Werten jeweils f.s. in $W_1,\ldots,W_n$. Dann $\mathcal{Z} = \varphi(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_n)$ disk. Z.V. mit Werten f.s. in $W = \varphi(W_1\times\ldots\times W_n)$. Verteilung von $\mathcal{Z}$ dann gegeben durch ($\forall z\in W$):

$$\mathbb{P}[\mathcal{Z} = z] = \sum_{\substack{x_1\in W_1,\ldots,x_n\in W_n\\ \varphi(x_1,\ldots,x_n)=z}} \mathbb{P}[\mathcal{X}_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n]$$

T *(Randverteilung)* $\mathcal{X}_i$ disk. Z.V. mit gem. p. $\forall k\in\{1,\ldots,n\}$ und $\forall x\in W_k$ gilt:

$$\mathbb{P}[\mathcal{X}_k = x] = \sum_{\substack{x_l\in W_l\\ l\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}}} p(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n)$$

Also: Elimination der anderen Variable(n) in p

Bem Verteilungsf. d. k-ten Randv. $F_{\mathcal{X}_k}(x) = \mathbb{P}[\mathcal{X}_k \leq x]$

$$F_{\mathcal{X}_k}(x) = \lim_{\substack{x_l\to\infty\\ l\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}}} F(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n)$$

T *(Erwartungswert Bild)* (Solange Summe wohldefiniert ist, summieren über $x_1\in W_1,\ldots,x_n\in W_n$)

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_n)] = \sum_{x_1,\ldots,x_n} \varphi(x_1,\ldots,x_n)p(x_1,\ldots,x_n)$$

T Folgende Aussagen sind äquivalent (für $\mathcal{X}_i$ mit Verteilung $\{p(x_1,\ldots,x_n)\}_{x_1\in W_1,\ldots,x_n\in W_n}$):

- $\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_n$ sind unabhängig
- $\forall x_1\in W_1,\ldots,x_n\in W_n$ gilt
  $$p(x_1,\ldots,x_n) = \mathbb{P}[\mathcal{X}_1 = x_1]\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}[\mathcal{X}_n = x_n]$$

5.2 Gemeinsame Stetige Verteilung

Def $\mathcal{X}_i$ haben gemeinsame stetige Dichte wenn Abbildung $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ existert, so dass $\forall a_i\in\mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \leq a_1,\ldots,\mathcal{X}_n \leq a_n] = \int_{-\infty}^{a_1}\cdots\int_{-\infty}^{a_n} f(x_1,\ldots)\,\mathrm{d}x_n\ldots\mathrm{d}x_1$$

T f gem. Dichte

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots)\,\mathrm{d}x_n\ldots\mathrm{d}x_1 = 1$$

Jeder Funk. f die obiges erfüllt ein W-Raum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ und n-Z.V. $\mathcal{X}_i$ zugeo. werden, s.d. f die gem. Dichte von $\mathcal{X}_i$ ist.

Intuition: $f(x_1,\ldots)\,\mathrm{d}x_1,\ldots$ beschreibt die W., dass ein zufälliger Punkt $(\mathcal{X}_1,\ldots)$ in $[x_1, x_1 + \mathrm{d}x_1]\times\ldots$ liegt

Bsp Gleichverteilungen:

- ***Einheitsquadrat*** $f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in[0,1]^2 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$
- ***Einheitskreisscheibe*** $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$
  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x,y)\in D \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

T *(Erwartungswert Bild)*

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathcal{X}_1,\ldots)] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\ldots)f(x_1,\ldots)\,\mathrm{d}x_n\ldots$$

Def *(Randverteilung)* Falls $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ gemeinsame Verteilung F haben, so ist die Verteilungsfunktion der ***Randverteilung*** von $\mathcal{X}$, $F_\mathcal{X}:\mathbb{R}\to[0,1]$ gegeben durch:

$$x\mapsto F_\mathcal{X}(x) = \mathbb{P}[\mathcal{X}\leq x] = \mathbb{P}[\mathcal{X}\leq x, \mathcal{Y}<\infty] = \lim_{y\to\infty} F(x,y)$$

Analog für $\mathcal{Y}$ ist sie $F_y:\mathbb{R}\to[0,1]$:

$$y\mapsto F_\mathcal{Y}(y) = \mathbb{P}[\mathcal{Y}\leq y] = \mathbb{P}[\mathcal{Y}<\infty, \mathcal{Y}\leq y] = \lim_{x\to\infty} F(x,y)$$

Die Dichten der Randverteilungen sind:

$$f_\mathcal{X}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad f_\mathcal{Y}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Herleitung der Randdichte ("wegintegrieren"):

$$f_\mathcal{X}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_\mathcal{X}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

(Hier wieder Umwandlung von Summe zu Integral von Diskret zu Stetig)

Bsp Beispiele von gemeinsamen stetigen Verteilungen

Einheitsquadrat ($f(x,y) = 1_{(x,y)\in[0,1]^2} = 1_{x\in[0,1]}1_{y\in[0,1]}$)

$$f_\mathcal{X}(x) = \int_0^1 1_{x\in[0,1]}1_{y\in[0,1]}\,\mathrm{d}y = 1_{x\in[0,1]}$$

$$f_\mathcal{Y}(y) = \int_0^1 1_{x\in[0,1]}1_{y\in[0,1]}\,\mathrm{d}x = 1_{y\in[0,1]}$$

Einheitskreisscheibe $(f(x,y)=\frac{1}{\pi}\cdot 1_{x^2+y^2\le 1})$

$$f_{\mathcal{X}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}1_{y^2\le 1-x^2}\,\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

$$f_{\mathcal{Y}}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}1_{x^2\le 1-y^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$$

T *(Unabhängigkeit)* $\mathcal{X}_i$ mit Dichten $f_{\mathcal{X}_i}$, dann ist äquiv.:

- $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_n$ sind unabhängig
- $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_n$ sind gem. stetig mit gem. Dichte (Prod. Randdichten): $f(x_1,\dots,x_n)=f_{\mathcal{X}_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot f_{\mathcal{X}_n}(x_n)$

Bsp *(Gleichverteilungen)*

Einheitsquadrat Wieder $f(x,y)=1_{(x,y)\in[0,1]^2}$, dann:

$$f(x,y)=1_{(x,y)\in[0,1]^2}=1_{x\in[0,1]}1_{y\in[0,1]}=f_{\mathcal{X}}(x)f_{\mathcal{Y}}(y)$$

Folglich sind die beiden Koordinaten unabhängig.

Einheitskreisscheibe $f(x,y)\neq f_{\mathcal{X}}(x)f_{\mathcal{Y}}(y)$, mit Dichten von oben. Also sind die beiden Koordinaten nicht unabhängig.

6 Das Gesetz der grossen Zahlen

Def $\overline{\mathcal{X}}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{X}_k$ ist das ***arithmetische Mittel*** der $\mathcal{X}_k$.

Begriff In Zusammenhang mit Zufallsvariablen auch ***Sichprobenmittel*** genannt. Realisierung wird ***empirischer Mittelwert*** genannt

6.1 Schwaches Gesetz der grossen Zahlen

T *(Schwaches Ges. der grossen Zahlen)* Sei $K=\{1,2,\dots\}$ und $\forall k\in K:\mathcal{X}_k$ unabh. Z.V. mit $\mathbb{E}[\mathcal{X}_k]=\mu$; $\mathbb{V}[\mathcal{X}_k]=\sigma^2$:

$$\overline{\mathcal{X}}_n=\frac{1}{n}S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{X}_k$$

Dann konvergiert $\overline{\mathcal{X}}_n$ für $n\to\infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\mu=\mathbb{E}[\mathcal{X}_k]$, also $\forall\varepsilon>0$ gilt $\mathbb{P}[|\overline{\mathcal{X}}_n-\mu|>\varepsilon]\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$

6.2 Starkes Gesetz der grossen Zahlen

T *(Starkes Ges. der grossen Zahlen)* Für $\mathcal{X}_1,\dots$ mit $\mathcal{X}_k$ unabhängig mit $\mathbb{E}[\mathcal{X}_k]$ endlich. Für

$$\overline{\mathcal{X}}_n=\frac{1}{n}S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{X}_k$$

gilt $\overline{\mathcal{X}}_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mu$ $\mathbb{P}$-fast sicher, also

$$\mathbb{P}\left[\{\omega\in\Omega\mid\overline{X}_n(\omega)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mu\}\right]=1$$

6.3 Zentraler Grenzwertsatz

Def *(Konvergenz in Verteilung)* $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{X}$ mit V.F. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, F. $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***konvergiert in V.*** gegen $\mathcal{X}$ ($\mathcal{X}_n\overset{d}{\to}\mathcal{X}$ für $n\to\infty$), falls $\forall$ Stetigkeitsp. $x\in\mathbb{R}$ von F gilt:

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[\mathcal{X}_n\le x]=\mathbb{P}[\mathcal{X}\le x]=F(x)$$

T *(Zentraler Grenzwertsatz (**ZGS**))*

i.i.d = independent and identically distributed (u.i.v in DE)

$\mathcal{X}_k$ i.i.d mit $\mathbb{E}[\mathcal{X}_k]=\mu$, $\mathbb{V}[\mathcal{X}_k]=\sigma^2$. Für Partialsummen $S_n=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{X}_k$ gilt $\forall x\in\mathbb{R}$ (mit Φ V.F. von Std.-Norm.-V):

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le x\right]=\Phi(x)$$

Bem $\mathbb{E}[S_n]=n\mu$, $\mathbb{V}[S_n]=n\sigma^2$; $S_n^*=\frac{S_n-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\overset{\text{approx}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$ für grosse n, mit $\overset{\text{approx}}{\sim}$ gespr. "approx. gleichverteilt gemäss". Also ist für $\mathbb{E}[S_n^*]=0$ und $\mathbb{V}[S_n^*]=1$.

Für S_n also: $S_n\overset{\text{approx}}{\sim}\mathcal{N}(n\mu,n\sigma^2)$, bzw. $\overline{\mathcal{X}}_n\overset{\text{approx}}{\sim}\mathcal{N}\left(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2\right)$

Bem Für $S_n\sim$ Bin(n,p) ist $S_n\overset{\text{approx}}{\sim}\mathcal{N}(np,np(1-p))$ und $\mathbb{P}[a<S_n\le b]\approx\Phi\left(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

6.4 Chernoff-Schranken

Def *(Momentерzeugende Funktion)* von $\mathcal{X}$ ist für $t\in\mathbb{R}$ $M_{\mathcal{X}}(t)+\mathbb{E}[e^{t\mathcal{X}}]$

Bsp $\mathcal{X}\sim$ Ber(p), dann $M_{\mathcal{X}}(t)=1-p+pe^t$;

$\mathcal{X}\sim$ Bin(n,p), dann $M_{\mathcal{X}}(t)=(1-p+pe^t)^n$

T *(Chernoff-Ungleichung)* $\mathcal{X}_k$ i.i.d. Z.V. mit jeweils $\forall t\in\mathbb{R}$ $M_{\mathcal{X}}(t)$ endl.; $\forall b\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[S_n\ge b]\le\exp\left(\inf_{t\in\mathbb{R}}(n\log(M_{\mathcal{X}}(t)-tb))\right)$$

T *(Chernoff-Schranke)* $\mathcal{X}_k\sim$ Ber(p_k) unabhängig; $S_n=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{X}_k$; $\mu_n=\mathbb{E}[S_n]=\sum_{k=1}^{n}p_k$ und $\delta>0$. Dann:

$$\mathbb{P}[S_n\ge(1+\delta)\mu_n]\le\left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)$$