Basiert auf dem Skript von V. Tassion

# 1 Wahrscheinlichkeitsräume

Def **Grundraum** $\Omega$ **Elementarereignis** $\omega \in \Omega$

Def **$\sigma$-Algebra** $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ **Ereignis** $A \in \mathcal{F}$

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$
(ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^{\mathsf{C}} \in \mathcal{F}$
(iii) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i \le n} A_i \in \mathcal{F}$

Lem. **Abgeschlossenheit** der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}$

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
(ii) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
(iii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
(iv) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

Def **Wahrscheinlichkeitsmass** auf $(\Omega, \mathcal{F}) : \mathbb{P}$

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] \quad \text{s.d.} \quad A \mapsto \mathbb{P}[A]$$

(i) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
(ii) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \iff A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ s.d. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Lem. **Eigenschaften** von $\mathbb{P}$

(i) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
(ii) $\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \emptyset \implies \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[A_i]$
(iii) $\mathbb{P}[A^{\mathsf{C}}] = 1 - \mathbb{P}[A]$
(iv) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

Def **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $A \in \mathcal{F}, \quad \omega \in \Omega$

$A$ tritt ein $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\omega \in A$
$A$ tritt nicht ein $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\omega \notin A$

(i) $\emptyset$ tritt nie ein
(ii) $\Omega$ tritt immer ein

Def **Laplace Modell** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\Omega$ endlich.

(i) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
(ii) $\forall A \in \mathcal{F} : \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Lem. **Nützliche Ungleichungen**

(i) $A \subseteq B \implies \mathbb{P}[A] \le \mathbb{P}[B]$ (Monotonie)
(ii) $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ (Union Bound)

$A_1, A_2, \ldots$ müssen *nicht* disjunkt sein.

Lem. **Stetigkeit** von $\mathbb{P}$ gegen $\infty$

(i) $\forall n : A_n \subseteq A_{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$
(ii) $\forall n : B_n \supseteq B_{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]$

$(A_n), (B_n)$ sind monotone Folgen von Ereignissen

Def **Bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$\mathbb{P}[A \mid B] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[B] > 0$

Lem. $\mathbb{P}[A|A] = 1 \qquad \mathbb{P}[A] > 0$

Lem. **Totale Wahrscheinlichkeit**

$$\forall A \in \mathcal{F} : \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big[A\big|B_i\big] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

$B_1, \cdots, B_n$ sind eine Partition von $\Omega$, $\mathbb{P}[B_i] > 0$.

Lem. **Bayes**

$$\forall i = 1, \cdots, n : \quad \mathbb{P}\big[B_i\big|A\big] = \frac{\mathbb{P}\big[A\big|B_i\big] \cdot \mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\big[A\big|B_j\big] \cdot \mathbb{P}[B_j]}$$

$B_1, \cdots, B_n$ sind eine Partition von $\Omega$, $\mathbb{P}[B_i] > 0$, $\mathbb{P}[A] > 0$.

Def **Unabhängigkeit**

$$A, B \text{ unabhängig} \overset{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

Lem. **Äquivalente Aussagen zur Unabhängigkeit**

(i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ (Defintion)
(ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ ($B$ kein Einfluss auf $A$)
(iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ ($A$ kein Einfluss auf $B$)

$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$

Def **Unabhängigkeit** für Ereignismengen

$$(A_i)_{i \in I} \text{ unabhängig} \overset{\text{def}}{\iff} \forall J \subseteq I : \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

$I$ ist eine Indexmenge. Dies muss für *alle* $J \subseteq I$ (endlich) gelten.