Basiert auf dem Skript von V. Tassion

1 Wahrscheinlichkeitsräume

Def **Grundraum** Ω **Elementarereignis** $\omega \in \Omega$

Def σ**-Algebra** $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ **Ereignis** $A \in \mathcal{F}$

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^{\mathsf{C}} \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i \leq n} A_i \in \mathcal{F}$

Lem. **Abgeschlossenheit** der σ-Algebra $\mathcal{F}$

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$

(iv) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

Def **Wahrscheinlichkeitsmass** auf $(\Omega, \mathcal{F}) : \mathbb{P}$

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] \quad \text{s.d.} \quad A \mapsto \mathbb{P}[A]$$

(i) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

(ii) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \iff A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ s.d. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Lem. **Eigenschaften** von $\mathbb{P}$

(i) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$

(ii) $\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \emptyset \implies \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[A_i]$

(iii) $\mathbb{P}[A^{\mathsf{C}}] = 1 - \mathbb{P}[A]$

(iv) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

Def **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $A \in \mathcal{F}, \quad \omega \in \Omega$

A tritt ein $\overset{\text{def}}{\iff} \omega \in A$

A tritt nicht ein $\overset{\text{def}}{\iff} \omega \notin A$

(i) $\emptyset$ tritt nie ein

(ii) Ω tritt immer ein

Def **Laplace Modell** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Ω endlich.

(i) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

(ii) $\forall A \in \mathcal{F}: \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Lem. **Nützliche Ungleichungen**

(i) $A \subseteq B \implies \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$ (Monotonie)

(ii) $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ (Union Bound)

$A_1, A_2, \ldots$ müssen *nicht* disjunkt sein.

Lem. **Stetigkeit** von $\mathbb{P}$ gegen ∞

(i) $\forall n : A_n \subseteq A_{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$

(ii) $\forall n : B_n \supseteq B_{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]$

$(A_n), (B_n)$ sind monotone Folgen von Ereignissen

1.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Def **Bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$\mathbb{P}[A \mid B] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[B] > 0$

Lem. $\mathbb{P}[A|A] = 1 \qquad \mathbb{P}[A] > 0$

Lem. **Totale Wahrscheinlichkeit**

$$\forall A \in \mathcal{F}: \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big[A\big|B_i\big] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

$B_1, \cdots, B_n$ sind eine Partition von Ω, $\mathbb{P}[B_i] > 0$.

Lem. **Bayes**

$$\forall i = 1, \cdots, n: \quad \mathbb{P}\big[B_i\big|A\big] = \frac{\mathbb{P}\big[A\big|B_i\big] \cdot \mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\big[A\big|B_j\big] \cdot \mathbb{P}[B_j]}$$

$B_1, \cdots, B_n$ sind eine Partition von Ω, $\mathbb{P}[B_i] > 0$, $\mathbb{P}[A] > 0$.

1.2 Unabhängigkeit

Def **Unabhängigkeit**

$$A, B \text{ unabhängig} \overset{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

Lem. **Äquivalente Aussagen zur Unabhängigkeit**

(i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ (Defintion)

(ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ (B kein Einfluss auf A)

(iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ (A kein Einfluss auf B)

$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$

Def **Unabhängigkeit** für Ereignismengen

$$(A_i)_{i\in I} \text{ unabhängig} \overset{\text{def}}{\iff} \forall J \subseteq I : \mathbb{P}\left[\bigcap_{j\in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

I ist eine Indexmenge. Dies muss für *alle* $J \subseteq I$ (endlich) gelten.

2 Zufallsvariablen

Def **Zufallsvariable**

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{s.d} \quad \forall a \in \mathbb{R} : \quad \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, X(\omega) \leq a\right\} \in \mathcal{F}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum

Def **Indikatorfunktion**

$$\forall \omega \in \Omega : \quad \mathbb{I}_A(\omega) := \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases} \qquad A \in \mathcal{F}$$

Notation Ereignisse bezüglich Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \{X \leq a\} &= \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, X(\omega) \leq a\right\} \\ \{a < X \leq b\} &= \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, a < X(\omega) \leq b\right\} \\ \mathbb{P}[X \leq a] &= \mathbb{P}\Big[\{X \leq a\}\Big] \end{aligned}$$

Def **Verteilungsfunktion** $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \qquad F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

Th. **Eigenschaftern der Verteilungsfunktion**

(i) F_X monoton

(ii) F_X rechtsstetig

(iii) $\lim\limits_{a \to -\infty} F_X(a) = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{a \to \infty} F_X(a) = 1$

Def **Unabhängigkeit**

$X_1, \cdots, X_n$ unabhängig $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_q, \cdots, X_n \leq x_n] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \cdots \mathbb{P}[X_n \leq x_n]$$

Th. **Unabhängigkeit von Gruppierungen**

$X_1, \cdots X_n$ sind unabhängig, dann sind auch $Y_1, \cdots, Y_k$ unabhängig:

$$Y_1 = \phi_1(X_1, \cdots, X_{i_1}), \cdots, Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1}, \cdots, X_{i_k})$$

$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ sind Indizes, $\quad \phi_1, \cdots, \phi_k$ sind Abbildungen

Def **Folgen von Zufallsvariablen**

(i) unabhängig $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall n \geq 1 : X_1, \cdots, X_n$ unabhängig

(ii) i.i.d $\overset{\text{def}}{\iff}$ unabhängig, und $\forall i, j : F_{X_i} = F_{X_j}$

i.i.d = Independent & identically distributed

2.1 Diskrete Zufallsvariablen

Def **Diskrete Zufallsvariable**

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ diskret} \overset{\text{def}}{\iff} \exists (W \subset \mathbb{R}) \preceq \mathbb{N} : \quad \mathbb{P}[X \in W] = 1$$

bzw. die Werte von X liegen f.s. in W

Lem. **Variablen diskreter Grundräume sind diskret**

$$\Omega \preceq \mathbb{N} \implies X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ist diskret}$$

Def **Verteilung diskreter Variablen**

$$\Big(p(x)\Big)_{x \in W} \text{ s.d. } p(x) := \mathbb{P}[X = x] \text{ heisst Verteilung}$$

X ist diskret mit $W \preceq \mathbb{N} \quad p(x)$ ist *nicht* F_X

Th. $\forall p(x) : \quad \sum\limits_{x \in W} p(x) = 1 \qquad p(x)$ ist eine diskrete Verteilung

Lem. **Zur diskreten Verteilung existiert eine Variable**

$$\forall \Big(p(x)\Big)_{x \in W} \in [0,1] : \quad \exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), X \text{ mit Verteilung } p(x)$$

D.h man kann sagen: "Sei X eine Variable mit Verteilung $\big(p(x)\big)_{x \in W}$"

Th. **Diskrete Verteilungsfunktion**

$$F_X(x) = \mathbb{P}[x \leq X] = \sum_{y \leq x} p(y) \qquad y \in W$$

2.2 Diskrete Verteilungen

Def **Bernoulli-Verteilung** $X \sim \text{Ber}(p)$

Intuitiv: Münzwurf

$$\mathbb{P}[X = 1] = p \qquad \mathbb{P}[X = 0] = 1 - p$$

$0 \leq p \leq 1, \quad W = \{0, 1\}$

Def **Binomial-Verteilung** $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Intuitiv: Anzahl Erfolge bei wiederholtem Bernoulli-Experiment

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$0 \leq p \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad W = \{0, \ldots, n\}$

Th. **Bernoulli-Summen sind Binomial-verteilt**

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n \sim \text{Bin}(p, n)$$

$0 \leq p \leq n, \quad n \in N, \quad X_1, \ldots, X_n \sim \text{Ber}(p)$ unabhängig

Lem. $\text{Bin}(1, p) = \text{Ber}(p)$

Lem. $X_1 \sim \text{Bin}(n, p), X_2 \sim \text{Bin}(m, p) \implies X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n + m, p)$

Lem. **Binomialverteilung erfüllt die Summenvoraussetzung**

$$\sum_{k=0}^{n} p(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (n-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

Def **Geometrische Verteilung** $X \sim \text{Geom}(p)$

Intuitiv: Bernoulli Experiment erfolgreich beim k-ten Versuch

$$\mathbb{P}[X = k] = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

$0 < p \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}_{\neq 0}$