Basiert auf dem Skript von V. Tassion

Vorwissen

Def **Geometrische Reihe**

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Wobei $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$

1 Wahrscheinlichkeitsräume

Def **Grundraum** Ω **Elementarereignis** $\omega \in \Omega$

Def σ-**Algebra** $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ **Ereignis** $A \in \mathcal{F}$

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^{\mathsf{C}} \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i\leq n} A_i \in \mathcal{F}$

Lem. **Abgeschlossenheit** der σ-Algebra $\mathcal{F}$

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$

(iv) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

Def **Wahrscheinlichkeitsmass** auf $(\Omega, \mathcal{F}) : \mathbb{P}$

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] \quad \text{s.d.} \quad A \mapsto \mathbb{P}[A]$$

(i) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

(ii) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \iff A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ s.d. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Lem. **Eigenschaften** von $\mathbb{P}$

(i) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$

(ii) $\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \emptyset \implies \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[A_i]$

(iii) $\mathbb{P}[A^{\mathsf{C}}] = 1 - \mathbb{P}[A]$

(iv) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

Def **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $A \in \mathcal{F}, \quad \omega \in \Omega$

A tritt ein $\overset{\text{def}}{\iff} \omega \in A$

A tritt nicht ein $\overset{\text{def}}{\iff} \omega \notin A$

(i) $\emptyset$ tritt nie ein

(ii) Ω tritt immer ein

Def **Laplace Modell** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Ω endlich.

(i) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

(ii) $\forall A \in \mathcal{F} : \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Lem. **Nützliche Ungleichungen**

(i) $A \subseteq B \implies \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$ (Monotonie)

(ii) $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ (Union Bound)

$A_1, A_2, \ldots$ müssen *nicht* disjunkt sein.

Lem. **Stetigkeit** von $\mathbb{P}$ gegen ∞

(i) $\forall n : A_n \subseteq A_{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$

(ii) $\forall n : B_n \supseteq B_{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]$

$(A_n), (B_n)$ sind monotone Folgen von Ereignissen

1.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Def **Bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$\mathbb{P}\big[A \mid B\big] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[B] > 0$

Lem. $\mathbb{P}[A|A] = 1 \qquad \mathbb{P}[A] > 0$

Lem. **Totale Wahrscheinlichkeit**

$$\forall A \in \mathcal{F} : \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big[A \big| B_i\big] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

$B_1, \cdots, B_n$ sind eine Partition von Ω, $\mathbb{P}[B_i] > 0$.

Lem. **Bayes**

$$\forall i = 1, \cdots, n : \quad \mathbb{P}\big[B_i \big| A\big] = \frac{\mathbb{P}\big[A \big| B_i\big] \cdot \mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\big[A \big| B_j\big] \cdot \mathbb{P}[B_j]}$$

$B_1, \cdots, B_n$ sind eine Partition von Ω, $\mathbb{P}[B_i] > 0$, $\mathbb{P}[A] > 0$.

1.2 Unabhängigkeit

Def Unabhängigkeit

$$A, B \text{ unabhängig} \overset{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

Notation $A \perp B \overset{\text{def}}{\iff} A, B$ unabhängig

Lem. Äquivalente Aussagen zur Unabhängigkeit

(i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ (Defintion)
(ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ (B kein Einfluss auf A)
(iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ (A kein Einfluss auf B)

$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$

Def Unabhängigkeit für Ereignismengen

$$(A_i)_{i \in I} \text{ unabhängig} \overset{\text{def}}{\iff} \forall J \subseteq I : \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

I ist eine Indexmenge. Dies muss für *alle* $J \subseteq I$ (endlich) gelten.

2 Zufallsvariablen

Def Zufallsvariable

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{s.d} \quad \forall a \in \mathbb{R} : \quad \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, X(\omega) \leq a\right\} \in \mathcal{F}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum

Def Indikatorfunktion

$$\forall \omega \in \Omega : \quad \mathbb{I}_A(\omega) := \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases} \qquad A \in \mathcal{F}$$

Notation Ereignisse bezüglich Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \{X \leq a\} &= \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, X(\omega) \leq a\right\} \\ \{a < X \leq b\} &= \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, a < X(\omega) \leq b\right\} \\ \mathbb{P}[X \leq a] &= \mathbb{P}\Big[\{X \leq a\}\Big] \end{aligned}$$

Def Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \qquad F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

Notation $\lim_{x \to a^-} F_X(a) = F(a^-) = \mathbb{P}[X < a]$

Lem. $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

Th. Eigenschaftern der Verteilungsfunktion

(i) F_X monoton
(ii) F_X rechtsstetig
(iii) $\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{a \to \infty} F_X(a) = 1$

Def Unabhängigkeit

$X_1, \cdots, X_n$ unabhängig $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_q, \cdots, X_n \leq x_n] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \cdots \mathbb{P}[X_n \leq x_n]$$

Th. Unabhängigkeit von Gruppierungen

$X_1, \cdots X_n$ sind unabhängig, dann sind auch $Y_1, \cdots, Y_k$ unabhängig:

$$Y_1 = \phi_1(X_1, \cdots, X_{i_1}), \cdots, Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1}, \cdots, X_{i_k})$$

$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ sind Indizes, $\quad \phi_1, \cdots, \phi_k$ sind Abbildungen

Def Folgen von Zufallsvariablen

(i) unabhängig $\overset{\text{def}}{\iff} \forall n \geq 1 : X_1, \cdots, X_n$ unabhängig
(ii) i.i.d $\overset{\text{def}}{\iff}$ unabhängig, und $\forall i, j : F_{X_i} = F_{X_j}$

i.i.d = Independent & identically distributed

2.1 Diskrete Zufallsvariablen

Def Diskrete Zufallsvariable

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ diskret} \overset{\text{def}}{\iff} \exists (W \subset \mathbb{R}) \preceq \mathbb{N} : \quad \mathbb{P}[X \in W] = 1$$

bzw. die Werte von X liegen f.s. in W

Lem. Variablen diskreter Grundräume sind diskret

$$\Omega \preceq \mathbb{N} \implies X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ist diskret}$$

Def Verteilung diskreter Variablen

$$\Big(p(x)\Big)_{x \in W} \text{ s.d. } p(x) := \mathbb{P}[X = x] \text{ heisst Verteilung}$$

X ist diskret mit $W \preceq \mathbb{N} \quad p(x)$ ist *nicht* F_X

Th. $\forall p(x) : \quad \sum_{x \in W} p(x) = 1 \qquad p(x)$ ist eine diskrete Verteilung

Lem. Zur diskreten Verteilung existiert eine Variable

$$\forall \Big(p(x)\Big)_{x \in W} \in [0, 1] : \quad \exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), X \text{ mit Verteilung } p(x)$$

D.h man kann sagen: "Sei X eine Variable mit Verteilung $\big(p(x)\big)_{x \in W}$"

Th. Diskrete Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \mathbb{P}[x \leq X] = \sum_{y \leq x} p(y) \qquad y \in W$$

2.2 Diskrete Verteilungen

Def **Bernoulli-Verteilung** $X \sim \text{Ber}(p)$
Intuitiv: Münzwurf

$$\mathbb{P}[X = 1] = p \qquad \mathbb{P}[X = 0] = 1 - p$$

$0 \le p \le 1, \quad W = \{0, 1\}$

Def **Binomial-Verteilung** $X \sim \text{Bin}(n, p)$
Intuitiv: Anzahl Erfolge bei wiederholtem Bernoulli-Experiment

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$0 \le p \le 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad W = \{0, \dots, n\}$

Th. **Bernoulli-Summen sind Binomial-verteilt**

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n \sim \text{Bin}(p, n)$$

$0 \le p \le n, \quad n \in N, \quad X_1, \dots, X_n \sim \text{Ber}(p)$ unabhängig

Lem. $\text{Bin}(1, p) = \text{Ber}(p)$

Lem. $X_1 \sim \text{Bin}(n, p), X_2 \sim \text{Bin}(m, p) \implies X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n + m, p)$

Def **Geometrische Verteilung** $X \sim \text{Geom}(p)$
Intuitiv: Bernoulli Experiment erfolgreich beim k-ten Versuch

$$\mathbb{P}[X = k] = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

$0 < p \le 1, \quad k \in \mathbb{N}_{\neq 0}$

Def **Negativbinomiale Verteilung** $X \sim \text{NBin}(r, p)$
Intuitiv: Wartezeit zum r-ten Erfolg

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

$r \in \mathbb{N}, \quad p \in [0, 1], \quad k \in \{r, r+1, \ldots\},$ Nur auf Folien

Th. **Interpretation**
Für $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig s.d. $X_i \sim \text{Ber}(p)$:

$$T_r := \inf\left\{ n \ge 1 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i = r \right\} \sim \text{NBin}(r, p)$$

Lem. $X_1, X_2, \ldots, X_r \sim \text{Geom}(p) \implies X := \sum_{i=1}^{r} X_i \sim \text{NBin}(r, p)$

Def **Hypergeometrische Verteilung** $X \sim \text{H}(n, r, m)$

$$\mathbb{P}[X = K] = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

$n \in \mathbb{N}, \quad m, r \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad k \in \{0, 1, \ldots \min(m, r)\}$

Th. **Interpretation**
n Objekte in einer Urne, r von Typ 1, $n - r$ von Typ 2
Ziehe m, Sei X die Anzahl Objekte Typ 1, dann $X \sim \text{H}(n, r, m)$
Das modelliert z.B. Lotto

Def **Poisson-Verteilung**
Intuitiv: Sehr seltene Ereignisse

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \quad k \in \mathbb{N}_0$

Th. **Poisson-Approximation der Binomialverteilung**
$X_n \sim \text{Bin}(\frac{\lambda}{n}), \quad N \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad n \ge 1$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[N = k]$$

Intuitiv: Für grosse n haben X_n und N sehr ähnliche Eigenschaften

Remark Auch genannt: *Konvergenz in Verteilung, Schwache Konvergenz*
Convergence in distribution/law, weak convergence

2.3 Stetige Verteilungen

Def **Stetig verteilte Zufallsvariable** $X : \Omega \to \mathbb{R}$
Intuitiv: $f_X(t)dt$ ist Die W.-keit, dass X in $[t, t + dt]$ ist

$$\exists f_X \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad \text{s.d.} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

Stetig, da F_X somit eine stetige Funktion ist

Remark f_X heisst *Dichtefunktion* von X

Th. **Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilung**
F_X stetig, stückweise diff.-bar $-\infty = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = \infty$

$$f_X = \begin{cases} F'_X(x) & \exists k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ s.d. } x \in (x_k, x_{k+1}) \\ a_k & x \in \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \end{cases}$$

Remark f_X (Stetig) ist Intuitiv das Analogon zu p_x (Diskret)

Def **Gleichverteilung** $X \sim \mathcal{U}([a, b])$
Intuitiv: Zufälliger Punkt in $[a, b]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Def **Exponentialverteilung** $T \sim \exp(\lambda)$

$$f_T(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$

Lem. **Eigenschaften von** exp

Def **Normalverteilung** $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Lem. **Eigenschaften von** $\mathcal{N}$

3 Erwartungswert

Def **Erwartungswert** (nicht-negativ)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \Big(1 - F_X(x)\Big)\ dx$$

$X : \Sigma \to \mathbb{R}, \quad X(\omega) \geq 0\ \forall \omega \in \Omega$

Remark $\mathbb{E}[X]$ kann unendlich sein

Th. $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \geq 0 \implies \mathbb{E}[X] \geq 0$

Gleichheit: $\mathbb{E}[X] = 0 \iff X = 0$, fast sicher

Def **Erwartungswert**

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-] \quad \text{falls} \quad \mathbb{E}[|X|] < \infty$$

Remark X kein konst. Vorzeichen, nicht $\mathbb{E}[|X|] < \infty$: $\mathbb{E}[X]$ undefiniert

3.1 Diskreter Erwartungswert

Th. **Diskreter Erwartungswert**

$$\mathbb{E}\big[\phi(X)\big] = \sum_{w \in W} \phi(x) \cdot \mathbb{P}[X = x]$$

$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad W \preccurlyeq \mathbb{N}, \quad \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ber(p)	$\mathbb{E}[X] = p$	$\mathbb{V}[X] = p(1-p)$
Poisson(λ)	$\mathbb{E}[X] = \lambda$	$\mathbb{V}[X] = \lambda$
Bin(n, p)	$\mathbb{E}[X] = n \cdot p$	$\mathbb{V}[X] = np(1-p)$
$\mathbb{I}_A$	$\mathbb{E}[\mathbb{I}_A] = \mathbb{P}[A]$	

3.2 Stetiger Erwartungswert

Def **Erwartungswert** (stetig)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\ dx$$

$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f(x)$ Dichtefunktion

Th. **Linearität**

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && \mathbb{E}[\lambda X] && = \lambda \mathbb{E}[X] \\ &\text{(ii)} && \mathbb{E}[X + Y] && = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Th. **Monotonie**

$$X \leq Y \implies \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$$

Th. **Multiplikation**

X, Y unabhängig

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Th. **Dichtefunktion bei Abbildungen**

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt

$$f \text{ Dichte von } X \iff \mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x)\ dx$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ s.d. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x\ dx = 1)$

Th. **Unabhängigkeit** (durch Abbildungen)

$\forall \phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt

$$X, Y \text{ unabh.} \iff \mathbb{E}[\phi(X)\psi(Y)] = \mathbb{E}[\phi(X)] \cdot \mathbb{E}[\psi(Y)]$$

Auch verallgemeinert für $X_1, \ldots, X_n$, $\phi_1, \ldots, \phi_n$

3.3 Ungleichungen

Th. **Markov**

$X \geq 0, \quad g : X(\Omega) \to [0, \infty)$ wachsend

$$\forall c \in \mathbb{R} \text{ s.d. } g(c) > 0 : \qquad \mathbb{P}[X \geq c] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(c)}$$

Th. **Jensen**

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $\quad \mathbb{E}[\phi(X)], \mathbb{E}[X]$ wohldefiniert

$$\phi\Big(\mathbb{E}[X]\Big) \leq \mathbb{E}\Big[\phi(X)\Big]$$

Lem. **Dreiecksungleichung**

Jensen mit $\phi(X) = |X|$ und $\phi(X) = X^2$

$$\Big|\mathbb{E}[X]\Big| \leq \mathbb{E}\Big[|X|\Big] \qquad \mathbb{E}[|X|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

Th. **Chebychev**

Y s.d. $\mathbb{V}[Y] < \infty, \quad c > 0$

$$\mathbb{P}\Big[|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq c\Big] \leq \frac{\mathbb{V}[Y]}{c^2}$$

3.4 Varianz

Def **Varianz**

$\mathbb{E}[X^2] < \infty$

$$\mathbb{V}[X] := \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X])^2\Big]$$

Def **Standardabweichung**

$$\rho(X) := \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

Notation Auch ρ, ρ_X

Lem. **Varianz** (Alternativ)

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Lem. **Eigenschaften**

(i) $\mathbb{V}[X] \geq 0$

(ii) $\mathbb{V}[aX] = a^2\mathbb{V}[X]$

(iii) $\mathbb{V}[X + a] = \mathbb{V}[X]$

Lem. **Addition** (Unabhängigkeit)

$X_1, \ldots, X_n$ paarweise unabhängig

$$\mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}[X_k]$$

3.5 Kovarianz

Def **Kovarianz**

X, Y s.d. $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$

$$\mathrm{cov}(X, Y) := \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])\Big]$$

Lem. **Kovarianz** (Alternativ)

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Remark $\mathrm{cov}(X, X) = \mathbb{V}[X]$

Lem. X, Y unabh. $\implies \mathrm{cov}(X, Y) = 0$

Nicht umgekehrt gültig

Lem. **Eigenschaften von** cov

Def **Kovarianzmatrix**

$$\Sigma = \mathrm{cov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \mathrm{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{cov}(X_2, X_1) & \mathrm{cov}(X_2, X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_n, X_1) & \mathrm{cov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$