1 Grundlagen

Axiome der reelen Zahlen

$\mathbb{R}$ ist ein kommutativer, angeordneter & ordnungsvollständiger Körper. Ordnungsvollständigkeit unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$.

$A1$	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
$A2$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$x + 0 = x$
$A3$	$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}$	$x + y = 0$
$A4$	$\forall x, z \in \mathbb{R}$	$x + z = z + x$
$M1$	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
$M2$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$x \cdot 1 = x$
$M3$	$\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}$	$x \cdot y = 1$
$M4$	$\forall x, z \in \mathbb{R}$	$x \cdot z = z \cdot x$
D	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
$O1$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$x \leq x$
$O2$	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$	$x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$
$O3$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$	$x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$
$O4$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$	$x \leq y \vee y \leq x$ (Total)
$K1$	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$	$x \leq y \implies x + z \leq y + z$
$K2$	$\forall x \geq 0, y \geq 0 \in \mathbb{R}$	$x \cdot y \geq 0$

Ordnungsvollständigkeit

$\forall A, B \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$ s.d. $\forall a \in A, b \in B \quad (a \leq b):$
$\exists c \in \mathbb{R}: \quad \forall a \in A\ \forall b \in B \quad (a \leq c \wedge c \leq b)$

Archimedisches Prinzip

$\forall x > 0, y \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad (y \leq n \cdot x)$

Absolutbetrag

Def:	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\lvert x\rvert := \max\{x, -x\}$
(i)	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\lvert x\rvert \geq 0$
(ii)	$\forall x, y \in \mathbb{R}$	$\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert\ \lvert y\rvert$
(iii)	$\forall x, y \in \mathbb{R}$	$\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$
(iv)	$\forall x, y \in \mathbb{R}$	$\lvert x + y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

Young'sche Ungleichung

$\forall \epsilon > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}: \quad 2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$

Bernoulli Ungleichung

$\forall n \in \mathbb{N}, x > -1 \qquad (1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$

Infimum & Supremum

Für $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\sup A := \begin{cases} \min\{c \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A: \ a \leq c\} \\ +\infty \quad \text{falls oben unbeschr.} \end{cases}$$

$$\inf A := \begin{cases} \max\{c \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A: c \leq a\} \\ -\infty \quad \text{falls unten unbeschr.} \end{cases}$$

Monotonie

Für $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}, \quad x, y \in D$:

mon. wachsend	$\overset{\text{def.}}{\iff}$	$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
str. mon. wachs.	$\overset{\text{def.}}{\iff}$	$x < y \implies f(x) < f(y)$
mon. fallend	$\overset{\text{def.}}{\iff}$	$x \geq y \implies f(x) \geq f(y)$
str. mon. fallend	$\overset{\text{def.}}{\iff}$	$x < y \implies f(x) < f(y)$

Intervalle

Untermengen von $\mathbb{R}$.

offenes Intervall	$\overset{\text{def.}}{\iff}$	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
geschl. Intervall	$\overset{\text{def.}}{\iff}$	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
kompakt	$\overset{\text{def.}}{\iff}$	$I = [a, b], \quad a \leq b$

Länge $\mathcal{L}(I) := \begin{cases} b - a & \exists a, b : a \leq b, \quad [a, b] = I \\ +\infty & \text{else} \end{cases}$

Satz von Cauchy-Cantor

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots$ s.d. $\forall i \geq 1 : I_i$ kompakt.

$\mathcal{L}(I_1) < +\infty \implies \bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$

Injektivität & Surjektivität

Für eine Funktion $f : X \to Y$:

Injektiv	$\overset{\text{def.}}{\iff}$	$\forall a, b \in X:$	$f(a) = f(b) \implies a = b$
Surjektiv	$\overset{\text{def.}}{\iff}$	$\forall y \in Y:$	$\exists x \in X : f(x) = y$

Quadratische Gleichungen

$a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Binomialkoeffizient

$n, k \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq k$

$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

2 Folgen

Folge	$(a_n)_{n \geq 1}$	$a:$	$\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$
Teilfolge	$(a_{l(n)})_{l(n) \geq 1}$	$l:$	$\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*\ \forall n\ l(n) < l(n+1)$

Limes

$\lim_{n \to \infty} (a_n) := l$ ist eindeutig definiert, falls:

$(i) \quad \forall \epsilon > 0: \quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\ \}$ ist endlich
$(ii) \quad \forall \epsilon > 0, \ \exists N \geq 1: \quad |a_n - l| < \epsilon, \ \forall n \geq N$

Konvergenz

$(a_n)_{n \geq 1}$ ist konvergent, falls $\lim_{n \to \infty} a_n$ existiert.

Konvergente Folgen sind immer beschränkt.

Nicht umgekehrt: $(-1)^n$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Rechenregeln Limes

Für konvergente $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$:

(i)	$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n)$	$=$	$\lim_{n \to \infty} (a_n) + \lim_{n \to \infty} (b_n)$
(ii)	$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n)$	$=$	$\lim_{n \to \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \to \infty} (b_n)$
(iii)	$\lim_{n \to \infty} (\frac{a_n}{b_n})$	$=$	$\lim_{n \to \infty} (a_n) \setminus \lim_{n \to \infty} (b_n)$
wobei	$\forall n \geq 1 (b_n \neq 0)$	$\wedge$	$\lim_{n \to \infty} (b_n) \neq 0$
(iv)	$\exists K\ \forall n \geq K (a_n \leq b_n)$	$\implies$	$\lim_{n \to \infty} (a_n) \leq \lim_{n \to \infty} (b_n)$

Limes Inferior & Limes Superior

Für $(a_n)_{n \geq 1}$ beschränkt:
$b_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} \qquad c_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$

$$\liminf_{n \to \infty} (a_n) := \lim_{n \to \infty} (b_n)$$
$$\limsup_{n \to \infty} (a_n) := \lim_{n \to \infty} (c_n)$$

$\forall n \in \mathbb{N} (b_n \leq c_n) \implies \liminf_{n \to \infty} (a_n) \leq \limsup_{n \to \infty} (a_n)$

Komplement-Trick

Nützlich für einige Grenzwerte:

$$\sqrt{ax + b} - \sqrt{cx + d} = \frac{ax + b - (cx + d)}{\sqrt{ax + b} + \sqrt{cx + d}}$$

Komplexe Folgen
$(b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}, \quad (a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}$

In $\mathbb{C}$ gelten die selben Resultate, aber:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq b_n \wedge \lim_{n\to\infty}(b_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$
(ii) $\liminf(a_n)$ und $\limsup(a_n)$ existieren nicht.

$(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}$ konv. $\iff$ $(\Re(a_n))_{n\geq 1}, \ (\Im(a_n))_{n\geq 1}$ konv.

2.1 Konvergenzkriterien

Monotoner Konvergenz-Satz

$(a_n)_{n\geq 1}$ mon. fallend, $(b_n)_{n\geq 1}$ mon. steigend:
a_n unten beschr: $\implies \lim_{n\to\infty}(a_n) = \inf\{a_n \mid n \geq 1\}$
b_n oben beschr: $\implies \lim_{n\to\infty}(b_n) = \sup\{b_n \mid n \geq 1\}$

Sandwich-Satz

$(a_n), (b_n), (c_n)$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n$

$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = A \implies \lim_{n\to\infty}(b_n) = A$

Cauchy Kriterium I
$(a_n)_{n\geq 1}$ beschr. $\wedge$ $\liminf_{n\to\infty}(a_n) = \limsup_{n\to\infty}(a_n)$

Cauchy Kriterium II
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1: \quad |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$

Bolzano-Weierstrass
$(a_n)_{n\geq 1}$ beschr. $\implies$ Ex existiert konv. Teilfolge $(b_n)_{n\geq 1}$

$\liminf_{n\to\infty}(a_n) \leq \lim_{n\to\infty}(b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n)$

3 Reihen

Reihe $(S_n)_{n\geq 1}$ s.d. $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$

Absolute Konvergenz
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv. $\implies$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

$\forall (a_k)_{k\geq 1}: \quad |\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Rechenregeln
Für konvergente Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$
(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} a_k)$

Konvergente Reihen sind Nullfolgen
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Nicht umgekehrt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, obwohl $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Doppelfolge $(a_{i,j})_{i,j\geq 1}$

Doppelreihe $\sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}), \quad \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j})$
Die beiden Grenzwerte können verschieden sein.

Cauchy
$\exists B \geq 0: \quad \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{i,j}| \leq B \quad \forall m \geq 0$
$\implies S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ und $U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}$ konv. abs.

$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = L_1$ und $\sum_{j=0}^{\infty} U_j = L_2$ konv. abs. s.d. $L_1 = L_2$.

Jede Anordnung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s.d. $b_k := a_{\sigma(k)}$ konv. abs.

Cauchy Produkt
$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \cdot b_j)$
$= a_o b_0 + (a_o b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$

3.1 Konvergenzkriterien

Vergleichssatz

Für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $\forall k \geq 1 \ (0 \leq a_k \leq b_k)$
oder $\exists K \geq 1 \ (0 \leq a_k \leq b_k) \ \forall k \geq K$
$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv. $\implies$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ div. $\implies$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ div.

Cauchy Kriterium
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1 \qquad |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon \qquad \forall m \geq n \geq N$

Monotoner Konvergenz-Satz
$\forall k \in \mathbb{N}^*(a_k \geq 0)$ konv. $\iff$ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ oben beschränkt

Leibniz
Für $(a_n)_{n\geq 1}$ mon. fall. und $\forall n(a_n \geq 0)$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$:
$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ konv.

Dirichlet
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. konv.
$\implies \forall \phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ (bijektiv) : $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$ abs. konv.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$, unabh. von ϕ.

Quotientenkriterium

$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ abs. konv.
$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ div.

Wobei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $\forall n(a_n \neq 0)$

Wurzelkriterium

$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ abs. konv.
$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ div.

Beide Kriterien geben keine Aussage bei genau 0.

3.2 Fundamentalreihen

Potenzreihen (Konvergenzradius)

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ abs. konv. $\impliedby |z| < \rho$
$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ div. $\impliedby |z| > \rho$

$$\rho = \begin{cases} +\infty, & \limsup_{n\to\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} = 0 \\ (\limsup_{n\to\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}})^{-1}, & \limsup_{n\to\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} > 0 \end{cases}$$

Geometrische Reihe
$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \iff |q| < 1$

Harmonische Reihe
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Zeta Funktion
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konv. $\iff s > 1$

Exponentialfunktion
$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ konv. $\forall z \in \mathbb{C}$

4 Stetige Funktionen

$D \subset \mathbb{R}, \quad x_0 \in D, \quad f, g : D \to \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Stetigkeit

f stetg in $x_0 \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D :$
$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

f stetig $\overset{\text{def.}}{\iff} \forall x \in D : f$ stetig in x

Stetigkeit durch Folgen

f stetig in $x_0 \iff \forall (a_n)_{n \geq 1} \in D :$
$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

Rechenregeln
Für f, g stetig in x_0:

$(i) \quad f + g, \qquad \lambda \cdot f, \qquad f \cdot g$
$(ii) \quad g(x_0) \neq 0 \implies \frac{f}{g} : \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$

sind stetig in x_0.

4.1 Theoreme

Zwischenwertsatz

$\forall c \in \mathbb{R} : f(a) \leq c \leq f(b)$
$\implies \exists z \in I : a \leq z \leq b \wedge f(z) = c$
$I \subset R$ (Intervall), $f : I \to \mathbb{R}$ (stetig), $a, b \in I$

Polynom-Nullstellen
Für alle $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 :$
$a_n \neq 0 \wedge n \equiv_2 1 \implies \exists x \in \mathbb{R} : P(x) = 0$

Min-Max-Satz

Stetige f sind auf I immer beschränkt.
$\exists u, v \in I : \quad f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$
$f : I = [a, b] \to \mathbb{R}, \quad f$ stetig auf $I, \quad I$ ist kompakt

Stetigkeit in Kompositionen
$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}, \quad f : D_1 \to D_2, \quad g : D_2 \to \mathbb{R}$
f, g stetig in $x_0, f(x_0) \implies g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.
f, g stetig $\implies g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ stetig

Stetigkeit der Umkehrabbildung
$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall
$f : I \to \mathbb{R}$ stetig, str. mon.
$\implies f^{-1} : f(I) \subset \mathbb{R} \to I$ stetig, str. mon.
& $\quad f(I) = [f(a), f(b)]$ ist ein Intervall.

4.2 Funktionenfolgen

Funktionenfolge $\quad (f_n)_{n \geq 1}$

Formal: eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^D$ s.d. $n \mapsto f(n) =: f_n$

Punktweise Konvergenz
$(f_n)_{n \geq 1}$ konv. pw. gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn:
$\forall x \in D : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

f muss nicht stetig sein, auch wenn $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ stetig.

Gleichmässige Konvergenz

$(f_n)_{n \geq 1}$ konv. glm. gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn:
$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1 : \forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Wobei N nur von ϵ abh. (nicht von x).
f_n glm. konv. $\implies f_n$ pw. konv.

Altenative Definition für gleichmässige Konvergenz
$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff f_n$ glm. konv. gegen f.

Gleichmässige Konvergenz ist stetig
$D \subset \mathbb{R}, \quad f_n : D \to \mathbb{R}, \quad f : D \to \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ stetig in D, glm. konv. gegen f
$\implies f$ auch stetig in D.

Es folgt: f nicht stetig $\implies f_n$ nicht glm. konv.

Cauchy Kriterium
$f_n : D \to \mathbb{R}$ konv. glm. in D, wenn:
$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1 : \forall n, m \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$

Limes-Funktion stetiger glm. konv. Folgen
$f_n : D \to \mathbb{R}$ glm. konv. Folge stetiger Funktionen.
$\implies f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ist stetig.

Glm. Konvergenz von Funktionenreihen
$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konv. glm. in D, falls:
$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ glm. konv. ist.

Vergleichssatz für stetige Funk.-Reihen
$D \subset \mathbb{R}, \quad f_n : D \to \mathbb{R}, \quad$ alle f_n stetig
$\forall x \in D : |f_n(x)| \leq c_n$ für $(c_n)_{n \geq 1}$ s.d. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konv.
$\implies \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konv., $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ stetig in D.

Potenzreihen
$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ s.d. $\rho > 0, \quad f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho$

$\implies \forall 0 \leq r < \rho : \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konv. glm. in $[-r, r]$
& $\quad f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

4.3 Grenzwerte von Funktionen

$D \subset \mathbb{R}, \quad f, g : D \to \mathbb{R}. \quad x_0 \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt für D

Häufungspunkt
$x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt in D, falls:
$\forall \delta > 0 : (\ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{\ x_0\}\ ) \cap D \neq \emptyset$
Man kann (in D) beliebig nah zu x_0, wobei $x_0 \notin D$ möglich.

Grenzwert für Funktionen
$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, wenn für L gilt:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 :$
$\forall x \in D \cap (\ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{\ x_0\}\ ) : \quad |f(x) - L| < \epsilon$

Grenzwert durch Folgen
$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ gdw.
$\forall (a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ s.d. $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 : \lim_{x\to x_0} f(a_n) = L$

Stetigkeit durch Grenzwert
f stetig in $x_0 \in D \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Rechenregeln
Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x), \quad \lim_{x\to x_0} g(x)$ exisieren:

$\lim_{x\to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$
$\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

Grenzwerte abschätzen
$f \leq g \implies \lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$ falls existent

Sandwich bei Funktionen
$g_1 \leq f \leq g_2 \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} g_1(x) = \lim_{x\to x_0} g_2(x)$
$\implies \lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g_1(x)$

Komposition und Grenzwert

Hier: $D, E \subset \mathbb{R}$, x_0 Hf.-P. in D, $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$
$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x))$, falls g stetig in $\lim_{x\to x_0} f(x)$

5 Differenzierbare Funktionen

Differenzierbarkeit

f diff.-bar in $x_0 \overset{\text{def.}}{\iff} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.

f diff.-bar in $D \overset{\text{def.}}{\iff} \forall x_0 \in D : f$ in x_0 diff.-bar.

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D

Weierstrass

f diff.-bar in $x_0 \iff \exists c \in \mathbb{R}$, $r : D \to \mathbb{R}$:
$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
$r(x_0) = 0$ und r stetig in x_0

Weitere Bedingung

f in x_0 diff.-bar $\iff \exists \phi : D \to \mathbb{R}$, ϕ stetig in x_0 s.d.
$\forall x \in D$: $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$, $\phi(x_0) = f'(x_0)$

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

f diff.-bar (in x_0) $\implies f$ stetig (in x_0) $\implies f$ integr.
Nicht umgekehrt: $f(x) = |x|$ ist stetig, aber nicht diff.-bar.

Rechenregeln

(i)	$(f+g)(x_0)$	$=$	$f'(x_0) + g'(x_0)$
(ii)	$(f \cdot g)'(x_0)$	$=$	$f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
(iii)	$(\frac{f}{g})'(x_0)$	$=$	$\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

f, g in x_0 diff.-bar, (iii) : $g(x_0) \neq 0$

Kompositionen

$D, E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ist H.-P. in D, $f(x_0)$ ist H.-P. in E
$f : D \to E$ diff.-bar in x_0, $g : E \to \mathbb{R}$ diff.-bar in $f(x_0)$
$g \circ f : D \to \mathbb{R}$ diff.-bar in x_0:
$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Ableitung der Umkehrabbildung

y_0 ist Häufungspunkt in E, f^{-1} in $f(x_0)$ diff.-bar und:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$f : D \to E$ ist bijektiv, $x_0 \in D$ ist H.-P.,
f diff.-bar in x_0, f^{-1} in $f(x_0)$ stetig.

5.1 Erste Ableitung

Spezielle Punkte: Lokale Extrema

$D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$
x_0 lokales Minimum, wenn:
$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D : \quad f(x) \leq f(x_0)$
x_0 lokales Maximum, wenn:
$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D : \quad f(x) \geq f(x_0)$

Sattelpunkte & Wendepunkte sind *keine* Extrema.

Lokale Extrema durch Ableitung

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f in x_0 diff.-bar
Falls x_0 ein lok. Extremum ist: $f'(x_0) = 0$.

$f'(x_0) > 0 \implies \exists \delta > 0 :$
$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$f'(x_0) < 0 \implies \exists \delta > 0 :$
$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

Verhalten von f mittels f'

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, in (a, b) diff.-bar
$\forall \xi \in (a, b) : \ \ldots$
$f'(\xi) = 0 \implies f$ ist konstant
$f'(\xi) = g'(\xi) \implies \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c \ \forall x \in [a, b]$
$f'(\xi) \geq 0 \implies f$ auf $[a, b]$ mon. wachsend.
$f'(\xi) > 0 \implies f$ auf $[a, b]$ str. mon. wachsend.
$f'(\xi) \leq 0 \implies f$ auf $[a, b]$ mon. fallend.
$f'(\xi) < 0 \implies f$ auf $[a, b]$ str. mon. fallend.

$\exists M \geq 0 : \quad |f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in (a, b)$
$\implies \forall x_1, x_2 \in [a, b] : \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$

5.2 Höhere Ableitungen

Definitionen: Höhere Ableitungen

$D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ diff.-bar in D, jedes $x_0 \in D$ ist H.P. von D,
$f^{(1)} := f'$, $n \geq 2$
f ist n-mal diff.-bar in $D \overset{\text{def.}}{\iff} f^{(n-1)}$ in D diff.-bar.
$f^{(n)} := (f^{n-1})'$ die n-te Ableitung von f.

f ist n-mal stetig diff.-bar in $D \overset{\text{def.}}{\iff} f^n$ stetig in D

f ist glatt $\overset{\text{def.}}{\iff} \forall n \geq 1$ f ist n-mal diff.-bar.

Stetigkeit tieferer Ableitungen

f n-mal diff.-bar $\iff f$ $n-1$-mal stetig diff.-bar

Rechenregeln

$D \subset \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal diff.-bar in D
$(i) \quad (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
$(ii) \quad (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
$(iii) \quad \forall x \in D : g(x) \neq 0 \implies \frac{f}{g}$ in D n-mal diff.-bar

Komposition höherer Ableitungen

$E, D \subset \mathbb{R}$ s.d. alle $x_0 \in E, D$ H.-P. sind,
$f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}$, f, g n-mal diff.-bar
$g \circ f$ ist n-mal diff.-bar.

$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{k} A_{n,k}(x)(g^{(k)} \circ f)(x)$

$A_{n,k}$ ist ein Polynom in $f', f^{(2)}, \ldots, f^{(n+1-k)}$.

Extrema mehrfach differenzierbarer f

$n \geq 0$, $a < x_0 < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in (a, b) $(n+1)$-mal diff.-bar
Wenn: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$:

$n \equiv_2 0$, x_0 lokales Extremum $\implies f^{(n+1)}(x_0) = 0$
$n \equiv_2 1$, $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \implies x_0$ str. lokales Minimum
$n \equiv_2 1$, $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \implies x_0$ str. lokales Maximum

Extrema zweimal differenzierbarer f

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, stetig, 2-mal diff.-bar in (a, b)
$a < x_0 < b$, $f'(x_0) = 0$, dann:

$f^{(2)}(x_0) > 0 \implies x_0$ str. lokales Minimum
$f^{(2)}(x_0) < 0 \implies x_0$ str. lokales Maximum

5.3 Wichtige Theoreme

Satz von Rolle

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ stetig, f diff.-bar in (a,b)

$f(a)=f(b) \implies \exists\xi\in(a,b): \quad f'(\xi)=0$

Satz von Lagrange

$f:(a.b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in (a,b) diff.-bar:

$$\exists\xi\in(a,b): f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

Satz von Cauchy

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, in (a,b) diff.-bar

$\exists\xi\in(a,b): g'(\xi)(f(b)-f(a))=f'(\xi)(g(b)-g(a))$

Falls $\forall x\in(a,b), \quad g'(x)\neq 0:$

$\implies g(a)\neq g(b), \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Satz von L'Hôpital

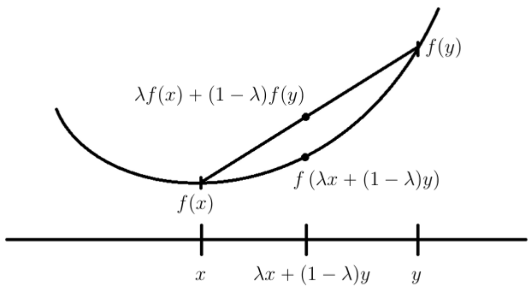
Falls: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=0, \lim\limits_{x\to b^-} =0, \lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert:

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Auch falls: $b=+\infty, \quad \lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty, \quad x\to a^+$

$f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ diff.-bar in $(a,b), \quad g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$

5.4 Konvexe/Konkave Funktionen



Definition: Konvex

$I\subset\mathbb{R}$ ist ein beliebiges Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$

f konvex auf I, falls: $\forall x\leq y\in I, \quad \forall\lambda\in[0,1]:$
$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \quad \leq \quad \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

f str. konvex auf I, falls: $\forall x<y\in I, \quad \forall\lambda\in(0,1):$
$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \quad < \quad \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

Summe konvexer Funktionen ist konvex

$f:I\to\mathbb{R}, \quad f$ konvex, $\quad n\geq 1, \quad \{x_1,\dots,x_n\}\subset\mathbb{R},$
$\lambda_1,\dots,\lambda_n\in[0,1], \quad \sum_{i=1}^n\lambda_i=1$

$f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)\leq\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$

Bedingungen für Konvexität

$f:I\to\mathbb{R}, \quad f$ beliebig

f (str.) konvex $\iff \forall x_0<x<x_1\in I:$
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq / < \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$

$f:(a,b)\to\mathbb{R}, \quad f$ diff.-bar in (a,b)

f (str.) konvex $\iff f'$ (str.) mon. wachsend.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}, \quad f$ 2 mal diff.-bar in (a,b)

f (str.) konvex $\iff f''\geq 0$ (bzw. $f''>0$) auf (a,b).

5.5 Potenzreihen & Taylorpolynome

Gleichmässige konvergenz erhält Differenzierbarkeit

$f_n:(a,b)\to\mathbb{R}$ ist Funktionenfolge,

f_n einmal in (a,b) diff.-bar $\forall n\geq 1$

$(f_n)_{n\geq 1}$ und $(f_n')_{n\geq 1}$ glm. konv. in (a,b).

$\implies f:=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ist stetig diff.-bar s.d. $f'=\lim\limits_{n\to\infty} f_n'$

Potenzreihen sind differenzierbar

$\sum_{k=1}^\infty c_k x^k$ ist Potenzreihe, s.d. $\rho>0$

$f(x)=\sum_{k=1}^\infty c_k(x-x_0)^k$ ist auf $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ diff.-bar.

$f'(x)=\sum_{k=1}^\infty k\cdot c_k(x-x_0)^{k-1} \qquad \forall x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$

Potenzreihen sind glatt

$f(x)=\sum_{k=1}^\infty c_k(x-x_0)^k$ ist glatt auf $(x_0-\rho,x_0+\rho)$

$f^{(j)}(x)=\sum_{k=j}^\infty c_k\frac{k!}{(k-j)!}(x-x_0)^{k-j}$, wobei $c_j=\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$

Approximation glatter f durch Polynome

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $(n+1)$-mal diff.-bar in (a,b)

$\forall a<x\leq b, \quad \exists\xi\in(a,x):$

$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Taylor Approximation

$a\in\mathbb{R}$ s.d. $c<a<d$, $\forall x\in[c,d]$, $\exists\xi\in(x,a):$

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{=:T_n}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{=:R_n}$$

Wobei: $\forall m\geq 1\ \exists n\geq 1: f^{(m)}(x_0)=T_n^{(m)}(x_0)$

R_n wird als Fehlerabschätzung um a genutzt.

$f:[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig, $(n+1)$ mal diff.-bar in (c,d)

Taylor-Approximation bei nahen Punkten

Die Taylor-Approximation bezieht sich wirklich nur auf $x=a$. Beispiel:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & x\neq 0\end{cases}$$

Wenn $a=0$ ist $T_n(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\geq 1$.

Aber $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ konvergiert sehr schnell.

6 Das Riemann Integral

$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad I = [a, b]$

Partition von I: $P \subsetneq [a,b],\ \{a,b\} \subset P,\ P$ endlich
Verfeinerung von P: Partition P' s.d. $P' \subset P$
Partitionenmenge von I: $\mathcal{P}(I) := \{P \mid P \text{ ist Partition von } I\}$

Für alle P_1, P_2 vom selben $I = [a,b]$ gilt:
$P_1 \cup P_2$ ist auch eine Partition von I
$\exists P' \subsetneq I : \quad P' \subset P_1 \wedge P' \subset P_2$

Ober- und Untersummen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, $P \subsetneq [a,b]$ ist Partition von $[a,b]$
$M \in \mathbb{R} : \quad M \geq 0 \quad \wedge \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$
$\delta_i := x_i - x_{i-1}$ für $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$

$s(f,P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, \qquad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

$S(f,P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, \qquad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

Für beliebige Partitionen P_1, P_2: $\quad s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$

$s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(\mathcal{I})} s(f,P), \qquad S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P)$

$s(f) \leq S(f)$

6.1 Riemann-Integrierbarkeit

Riemann-Integrierbarkeit

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschr.) ist integrierbar $\overset{\text{def.}}{\iff} s(f) = S(f)$

$$\int_a^b f(x)\ dx := s(f) = S(f)$$

Integrierbarkeit durch Ober-/Untersummen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschr.) ist integrierbar
$\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists P \in \mathcal{P}(I) : \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$

Integrierbarkeit als Grenzwert

Sei $\mathcal{P}_\delta(I) := \{$Partitionen P $\subsetneq [a,b] \mid \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \leq \delta\}$
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschr.) ist integrierbar
$\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall P \in \mathcal{P}_\delta(I) : \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$

Polynombrüche sind Integrierbar, ohne Nullstellen

$P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Polynome
$\neg \exists x \in [a,b] : Q(x) = 0 \implies \frac{P}{Q} : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integr.

Stetige Funktionen sind integrierbar

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\implies f$ ist integrierbar.
Nicht umgekehrt: Treppenfunktionen sind integr., aber nicht stetig.

Monotone Funktionen sind integrierbar

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies f$ ist integrierbar.

Operationen erhalten Integrierbarkeit

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschr. und intgrierbar, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$
$f + g, \quad \lambda \cdot f, \quad f \cdot g, \quad |f|, \quad \min(f,g), \quad \max(f,g), \quad \frac{f}{g}$
sind integrierbar. (Für $\frac{f}{g} : |g(x)| > 0$)

Konstanten und Addition

I kompakt, $\quad f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ beschr. integr., $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\ dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\ dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\ dx$$

Gleichmässige Stetigkeit

$D \subset \mathbb{R}, \quad f : D \to \mathbb{R}$
f in D glm. stetig $\overset{\text{def.}}{\iff} \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D :$
$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Gleichmässige Stetigkeit auf kompakten Intervallen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
f Stetig auf kompaktem $[a,b] \implies f$ glm. stetig auf $[a,b]$

Integrale erhalten Monotonie

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschr. integr.
$\forall x \in [a,b] : \quad f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$

$|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$

6.2 Wichtige Theoreme

Cauchy-Schwarz

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschr. integr.

$$\int_a^b |f(x)g(x)\ dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\ dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\ dx}$$

Mittelwertsatz bei Integralen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig
$\exists \xi \in [a,b] : \quad \int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b - a)$

Konseqzenz des Mittelwertsatz für Integrale

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f$ stetig, $\quad g$ beschr. integr.
$\forall x \in [a,b] : \quad g(x) \geq 0$
$\implies \exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\ dx$

Integration ist die Umkehrfunktion der Ableitung

$a < b, \quad f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig
$F(x) : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) \mapsto \int_a^x f(x)\ dt,$

ist in $[a,b]$ stetig, diff.-bar und $F'(x) = f(x)$.

Stammfunktionen

$a < b, \quad f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig
$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von f
$\overset{\text{def.}}{\iff} F$ stetig diff.-bar in $[a,b]$ und $F' = f$ in $[a,b]$.

Fundamentalsatz der Differentialrechnung

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig
Die Stammfunktion F von f existiert s.d.
$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$

Bogenlänge

$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$

6.3 Integrationsmethoden

Bei rationalen f: Polynomdivision & Partialbruchzerlegung.

Partielle Integration

$a < b, \quad f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.-bar

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)$$

Substitution

$a < b, \quad \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.-bar,
$I \subset \mathbb{R}, \quad \phi([a, b]) \subset I, \quad f : I \to \mathbb{R}$ stetig

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt$$

Umgekehrte Kettenregel

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diff., $\quad g : [c, d] \to \mathbb{R}$ diff, $\quad [c, d] \subseteq f([a, b])$
$\int f'(g(x) \cdot g'(x)\, dx = f(g(x))$

Umformungen

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to \mathbb{R}$
$a, b, c \in \mathbb{R}$ s.d. $[a + c, b + c] \subset I$
$\Longrightarrow \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx = \int_a^b f(t + c)\, dt$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ s.d. $c \neq 0$ und $[ac,\ bc] \subset I$
$\Longrightarrow \int_a^b f(ct)\, dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x)\, dx$

6.4 Uneigentliche Integrale

Definition: Uneigentliche Integrale

$f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ beschr. integr auf $[a, b] \quad \forall b > a$
Falls $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ existiert:

$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$

Man sagt: f ist auf $[a, \infty)$ integrierbar.

Reihenkonvergenz über Integration

Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ mon. fallend.

$\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konv. $\iff \int_1^\infty f(x)\, dx$ konv.

Integration von $f : (a, b] \to \mathbb{R}$
Integrierbar, falls $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx$ existiert.

Man schreibt dann: $\int_a^b f(x)\, dx$.

6.5 Konvergente Reihen

Integration konvergenter Folgen

$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ Folge beschr. integr. f, glm. konv. zu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
f ist beschr. integr. und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$

Integration konvergenter Reihen

$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ Folge beschr. integr. $\sum_{n=0}^\infty f_n$, glm. konv. in $[a, b]$
$\sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b (\sum_{n=0}^\infty f_n(x))\, dx$

Integration von Potenzreihen

$f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_k x^k$ s.d. $\rho > 0$.

$\forall 0 \leq r < \rho :$ $\quad f$ auf $[-r, r]$ integr. und
$\forall x \in (-\rho, \rho) :$ $\quad \int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{c^n}{n+1} x^{n+1}$

6.6 Approximationsformeln

Bernoulli Polynome

Wir nutzen Polynome P_n, die erfüllen:
$P_k' = P_{k-1}, \quad k \geq 1$ und $\int_0^1 P_k(x)\, dx = 0\ \forall k \geq 1$

Für die Bernoulli-Polynome B_k gilt: $B_k(x) = k! P_k(x)$.

B_k ist rekursive definiert:
$B_0 = 1, \quad B_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$

B_k Explizit:
$B_k(x) = \sum_{i=0} \binom{k}{i} B_i^k x^{k-i}$ s.d. $\int_0^1 B_k(x)\, dx = 0$

Somit:
$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad \ldots$

$$\widetilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \forall x : 0 \leq x < 1 \\ B_k(x - n) & \forall x : n \leq x < n + 1 \end{cases}$$

Euler-McLaurin Summationsformel

$f : [0, n] \to \mathbb{R}$ k-mal stetig diff.-bar, $\quad k \geq 1$
Für $k = 1$:
$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x)\, dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \widetilde{B}_1(x) f'(x)\, dx$
Für $k \geq 2$:
$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x)\, dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0))$
$+ \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!} (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \widetilde{R}_k$

s.d $\quad \widetilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \widetilde{B}_k(x) f^{(k)}(x)\, dx$

Stirling'sche Formel

Zur Approximation von $n!$

$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n}$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n}} = 1$

Via Euler-McLaurin lässt sich präziser beweisen:

$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \cdot \exp(\frac{1}{12n} + R_3(n))$

s.d. $|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$

7 Spezifische Funktionen

7.1 Grundfunktionen

Potenzen
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto x^n$

stetig und glatt $\forall n \in \mathbb{N}$.
$n \equiv_2 1 \iff f$ str. monoton wachsend

Polynome
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_0$

stetig und glatt.
$\deg(f) := \max\limits_{0 \leq i \leq n} \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$

Für poly. $f, g \neq 0$, Nullstellen von g: $x_1, \ldots, x_m$:
$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\} \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ ist stetig.

Betragsfunktion
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto |x|$

stetig, in $x_0 = 0$ nicht diff.-bar.
g stetig $\implies |g|(x) := |g(x)|$ stetig.

Abrundrungsfunktion
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto \lceil x \rceil := \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$

f nicht stetig in $x_0 \iff x_0 \in \mathbb{Z}$
Für $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist $\lceil x \rceil : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Min.-/Max.-Funktionen
$\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x))$
$\min(f, g)(x) := \min(f(x), g(x))$

Sind f, g stetig, sind auch $\max(f, g), \min(f, g)$ stetig.

7.2 Beweisfunktionen

Indikatorfunktion von $\mathbb{Q}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$: nicht stetig, nicht integr. in x.

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Ist nur in $x = \frac{1}{2}$ stetig, sonst nirgends.

Van der Waerden Funktion
$x \in \mathbb{R}$
Sei $g(x) = \min\{|x - m| \mid m \in \mathbb{Z}\}$.
D.h. g gibt die nächste ganze Zahl zu x aus.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$

Die Reihe ist glm. konv. auf ganz $\mathbb{R}$ und f stetig.
f ist nirgendwo diff.-bar.

Glatte Funktion, ohne konv. Potenzreihe

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f ist glatt auf $\mathbb{R}$ s.d. $\forall k \geq 0 : f^{(k)}(0) = 0$.
Da $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ gibt es keine P.-Reihe mit pos. ρ.

Funktion mit nicht-stetiger Ableitung

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Wobei f' nicht stetig in $x_0 = 0$.

7.3 Exponentialfunktion

Definition: Exponentialfunktion

$\forall z \in \mathbb{C} : \exp(z)$ konvergiert.

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Exponentialfunktion in $\mathbb{R}$
$\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

str. mon. wachs., stetig, surj. und glatt.

$\exp(x) > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\exp(x) > 1$	$\forall x > 0$
$\exp(x) \geq 1 + x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y)$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$

Natürlicher Logarithmus
$\exp^{-1} := \quad \ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

str. mon. wachs., stetig, bijektiv und glatt.

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \forall a, b \in (0, +\infty)$

Allgemeine Potenzen
$x^a : (0, +\infty) \to (0, +\infty) := \quad \exp(a \cdot \ln(x))$
$x > 0, \quad a \in \mathbb{R}$

$a > 0 \implies$ stetig, bijektiv, str. mon. wachs.
$a < 0 \implies$ stetig, bijektiv, str. mon. fall.

Potenzgesetze
$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0 :$

$\ln(x^a) = a \ln(x)$	$x^a x^b = x^{a+b}$
$(x^a)^b = x^{ab}$	$x^0 = 1$

7.4 Trigonometrische Funktionen

Definition: Trigonometrische Funktionen

$\forall z \in \mathbb{C} : \sin(z), \cos(z)$ konv. abs.

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \qquad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

Trigonometrische Funktionen in $\mathbb{R}$

$\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig und glatt.

$\pi := \inf\{t > 0 \mid \sin(t) = 0\} \in (2, 4)$

$\forall 0 \leq x \leq \sqrt{6} : \quad x \geq \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{3!}$

Nullstellen von $\sin$ in $\mathbb{R}$: $\{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$$
$$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$$

Nullstellen von $\cos$ in $\mathbb{R}$: $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in (-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, -\tfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi)$$
$$\cos(x) < 0 \quad \forall x \in (-\tfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\tfrac{\pi}{2} + (2k+2)\pi)$$

Hyperbelfunktionen

$$\cosh(x) \quad : \mathbb{R} \to [1, \infty] \quad := \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh(x) \quad : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad := \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) \quad : \mathbb{R} \to [-1, 1] \quad := \quad \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$\sinh, \cosh, \tanh$ sind glatt.

8 Tabellen

Credits: Einige Tabellen von D. Camenisch & J. Steinmann

8.1 Trigonometrische Identitäten

Trigonometrische Identitäten in $\mathbb{C}$

e^{iz}	$=$	$\cos(z) + i\sin(z)$
$\cos(z)^2 + \sin(z)^2$	$=$	1
$\sin(z)$	$=$	$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
$\cos(z)$	$=$	$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
$\sin(z+w)$	$=$	$\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
$\cos(z+w)$	$=$	$\cos(z)\cos(w) + \sin(z)\sin(w)$
$\sin(2z)$	$=$	$2\sin(z)\cos(z)$
$\cos(2z)$	$=$	$\cos(z)^2 - \sin(z)^2$

$e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1, \quad e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

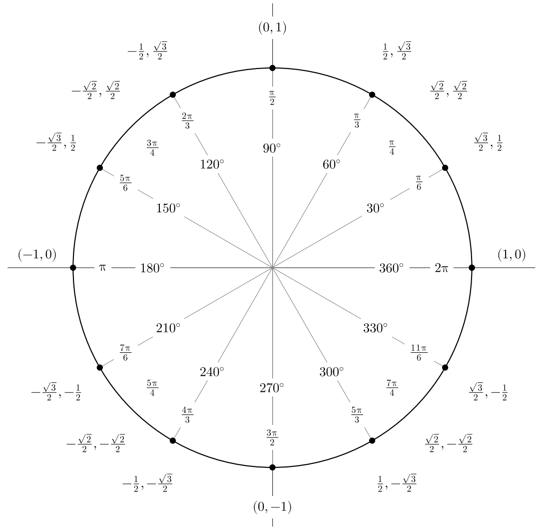
$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ kann hilfreich sein um $\sin(z)^n$ um zuschreiben.

Trigonometrische Identitäten in $\mathbb{R}$

$\sin(-x)$	$=$	$-\sin(x)$
$\cos(-x)$	$=$	$\cos(x)$
$\tan(-x)$	$=$	$-\tan(x)$
$\sin(x + \frac{\pi}{2})$	$=$	$\cos(x)$
$\cos(x + \frac{\pi}{2})$	$=$	$-\sin(x)$
$\sin(x + \pi)$	$=$	$\cos(x)$
$\sin(x + 2\pi)$	$=$	$\sin(x)$
$\sin(x)^2$	$=$	$\frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
$\cos(x)^2$	$=$	$\frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
$\sin(\arctan(x))$	$=$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cos(\arctan(x))$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\sin(x)$	$=$	$\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan(x)^2}}$
$\cos(x)$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan(x)^2}}$

8.2 Trigonometrische Funktionen: Werte

Funktionswerte am Winkelkreis



Trigonometrische Analogien

	$-\alpha$	$90° - \alpha$	$90° + \alpha$	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$k * 360° - \alpha$	$k * 360° + \alpha$
sin	$-\sin$	cos	cos	sin	$-\sin$	$-\sin$	sin
cos	cos	sin	$-\sin$	$-\cos$	$-\cos$	cos	cos
tan	$-\tan$	cot	$-\cot$	$-\tan$	tan	$-\tan$	tan

Werte der trigonometrischen Funktionen

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	270°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

8.3 Integrale & Ableitungen

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x	c	0
$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$	x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{a \cdot (n+1)} \cdot (ax+b)^{n+1}$	$(ax+b)^n$	$n \cdot (ax+b)^{n-1} \cdot a$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$\frac{n}{n+1} \cdot x^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$x \cdot (\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$\frac{x}{\ln(a)} \cdot (\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin(x)^2}$
$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \cdot \arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\ln\lvert\cosh(x)\rvert$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh(x)^2} = 1 - \tanh(x)^2$
	arcsinh(x)	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	arccosh(x)	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	arctanh()	$\frac{1}{1-x^2}$

8.4 Taylorreihen

$f(x)$	T_n
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$
$\tanh(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)$

8.5 Weitere Integrale & Ableitungen

$F(x)$	$f(x)$
$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$	$\frac{1}{ax+b}$
$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$	$\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$
$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2}\ln\lvert x+f(x)\rvert$	$\sqrt{a^2+x^2}$
$\frac{x}{2}f(x) - \frac{a^2}{2}\arcsin(\frac{x}{\lvert a\rvert})$	$\sqrt{a^2-x^2}$
$\frac{x}{2}f(x) - \frac{a^2}{2}\ln\lvert x+f(x)\rvert$	$\sqrt{x^2-a^2}$
$\ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$
$\arcsin(\frac{x}{\lvert a\rvert})$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$\frac{1}{a} \cdot \arctan(\frac{x}{a})$	$\frac{1}{x^2+a^2}$
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
x^x	$x^x \cdot (1+\ln\lvert x\rvert)$
$(x^x)^x$	$(x^x)^x(x+2x\ln\lvert x\rvert)$
$x^{(x^x)}$	$x^{(x^x)}(x^{x-1} + \ln\lvert x\rvert \cdot x^x(1+\ln\lvert x\rvert)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\sin(x)^2$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\cos(x)^2$

8.6 Grenzwerte: Folgen

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$	$\lim_{x\to0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^b = 1$	$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^b = 1$
$\lim_{x\to\infty} x^a q^x = 0,\ \forall 0 \le q < 1$	$\lim_{x\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$	$\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{\mathrm{e}}$
$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$	$\lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
$\lim_{x\to0} \frac{\log 1-x}{x} = -1$	$\lim_{x\to0} x\log x = 0$
$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to0} \frac{x}{\arctan x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$	$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)\ \forall a > 0$	$\lim_{x\to0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$
$\lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x} = 0$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$	$\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$

8.7 Grenzwerte: Reihen

$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$	$\sum_{i=1}^\infty z^i = \frac{1-z^{i+1}}{1-z}$