

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Janis Hutz

<https://janishutz.com>

3. März 2026

1 Basics

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Begriff Ω **Grundraum**, $\omega \in \Omega$ **Elementarereignis**

D 1.1 (*Sigma-Algebra*) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist σ -Algebra, falls:

- E1.** $\Omega \in \mathcal{F}$
- E2.** $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ (A Ereignis $\Rightarrow$ nicht A auch)
- E3.** $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
($A_1, \dots$ Ereignisse $\Rightarrow A_1$ oder A_2 oder $\dots$ ein Ereignis)

Bsp σ -Algebren bei 1x Würfeln ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, dabei $|\mathcal{F}| = 64$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$

Keine σ -Algebren sind bspw:

- $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ (Komplementärereignis $\emptyset$ fehlt, E2 verletzt)
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$
(E3 verletzt, da bspw $\{4, 5, 6\} \cup \{1\} \notin \mathcal{F}$)

1.1.1 Wahrscheinlichkeitsmass

D 1.2 (*W.M*) $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ mit $A \mapsto \mathbb{P}[A]$, notiert $(\Omega, \mathcal{F})$, falls folgende Eigenschaften gelten

- E1.** $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
- E2.** (σ -**Additivität**) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$, falls $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (*disjunkte Vereinigung*)

Bsp Wieder mit Würfeln und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, sind W.M:

- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{6}$
- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i \in A} p_i$ (p_i dabei prob. Zahl i würfeln; $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$ ist für fairen Würfel)

1.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

D 1.3 (*W.R*) ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Begriff A Ereignis, **tritt (nicht) ein** (für ω), if $\omega \in (\notin) A$

B 1.4 $A = \emptyset$ tritt niemals ein, $A = \Omega$ immer.

1.2 Beispiele von Wahrscheinlichkeitsräumen

D 1.5 (*Laplace Modell*) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$, $\mathbb{P}$ ist W.M.

Bsp Auf Kreis mit $n \geq 3$ Punkten, Modell für Nachbarn ist: $A = \{\{1, 2\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ für $\Omega = \{E \subseteq \{1, \dots, n\} \mid |E| = 2\}$, also $\mathbb{P}[A] = \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}$

Bsp W. 1. mal Kopf ist bei Wurf k : $p_k = p^{k-1}(1-p)$

1.3 Eigenschaften/Interp. von Ereignissen

T 1.6 $\mathcal{F}$ σ -Algebra. Es gilt: **E4.** $\emptyset \in \mathcal{F}$

E5. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

E6. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

E7. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

A^C	A tritt nicht ein
$A \cap B$	A und B treten ein
$A \cup B$	A oder B treten ein
$A \Delta B$	entweder A oder B tritt ein
$A \subseteq B$	B tritt ein, falls A eintritt
$A \cap B = \emptyset$	A und B nicht gleichzeitig
	$\forall \omega \in \Omega$
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit	nur eines von A_1, A_2, A_3
A_1, A_2, A_3 paarw. disj.	kann eintreten

Wir wählen nicht immer $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, bspw. für mehrstufige Experimente ist dies nicht ideal (k. Filtern, Überabzählbarkeit)

1.4 Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsmasse

T 1.7 $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$, A Ereignis:

- E1.** Es gilt $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- E2.** **Additivität** $k \geq 1$, $A_1, \dots, A_k$ paarw. disj. Ereignisse:
 $\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_k]$
- E3.** $\mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$
- E4.** B Ereignis, dann $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

1.4.1 Nützliche Ungleichungen

T 1.8 (*Monot.*) $A, B \in \mathcal{F}$, dann $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

T 1.9 (*Union Bound*) Für $A_1, A_2, \dots$ (mögl. disj.) gilt:
 $\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$. Auch für endl. n.-leere Ereignisse

1.4.2 Anwendungen der Ungleichungen

Sie sind nützlich für schwer zu berechnende W.

T 1.11 (A_n) mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ (mon. wachsend). Dann:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n]$

und für (B_n) mit $B_n \supseteq B_{n+1}$ (mon. fallend) gilt:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n]$

B 1.12 Mit Monotonie: $\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_{n+1}]$ und $\mathbb{P}[B_n] \geq \mathbb{P}[B_{n+1}]$. Grenzwerte oben wohldefiniert.

1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

D 1.13 Für $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \quad (= \mathbb{P}[A] \text{ wenn } B \text{ eingetreten ist})$$

B 1.14 $\mathbb{P}[B|B] = 1$

T 1.15 $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, dann ist $\mathbb{P}[\cdot|B]$ ein W-Mass auf Ω

T 1.16 (*Totale W.*) $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$ mit B_i s eine Partition von Ω , mit B_i paarw. disj. und $\mathbb{P}[B_i] > 0 \forall 1 \leq i \leq n$. Dann:

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

T 1.17 (*Bayes*) B_i wie oben, dann $\forall A$ mit $\mathbb{P}[A] > 0$:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

1.6 Unabhängigkeit

D 1.18 $A, B \in \mathcal{F}$ **unabh.** falls $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

B 1.19 Falls $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$: $\forall B \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$. Falls A unabh. von sich selbst ($\mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$), dann $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$. **Implik.:** A unabh. v. $B \Leftrightarrow A$ unabh. v. B^C

T 1.20 Sei $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Dann ist equivalent:

- (i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ (A und B **unabhängig**)
- (ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ (*Eintreten von B beeinflusst A nicht*)
- (iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ (*Eintreten von A beeinflusst B nicht*)

D 1.21 I eine beliebige Menge. $(A_i)_{i \in I}$ **unabhängig** falls:

$$\forall J \subseteq I \text{ endlich} \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

2 Zufallsvar., Verteilungsfunktionen

2.1 Abstrakte Definition

D 2.1 (Zufallsvariable) kurz Z.V. ist $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt: $f = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ (notwendige Bedingung für Wohldefiniertheit von $\mathbb{P}[f]$)

Notation Ohne ω : $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$, etc

2.2 Verteilungsfunktion

D 2.2 $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, def: $\forall a \in \mathbb{R} \quad F_{\mathcal{X}}(a) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \leq a]$

T 2.3 $a < b \in \mathbb{R}$. Dann: $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$

T 2.4 $\mathcal{X}$ Z.V. auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und V.F. $F = F_{\mathcal{X}}$. Eig.:

1. F ist monoton wachsend
2. F ist rechtsseitig ($F(a) = \lim_{h \downarrow 0} F(a + h) \quad \forall a \in \mathbb{R}$)
3. $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 0$ und $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 1$

2.3 Unabhängigkeit

D 2.5 Z.V. $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ sind **unabh.** falls $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
 $\mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \leq x_1, \dots, \mathcal{X}_n \leq x_n] = \mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \leq x_1] \cdots \mathbb{P}[\mathcal{X}_n \leq x_n]$

B 2.6 Alternativ: ZVs unabhängig, falls $\forall I_1 \subseteq \mathbb{R}, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle $\{\mathcal{X}_1 \in I_1\}, \dots, \{\mathcal{X}_n \in I_n\}$ unabhängig

2.3.1 Gruppierung

T 2.7 n ZV $\mathcal{X}_i$ und $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ sind indizes und $\phi_1, \dots, \phi_k$ Abbildungen. Dann sind unabhängig:
 $Y_1 = \phi_1(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{i_1}), \dots, Y_k = \phi_k(\mathcal{X}_{i_{k-1}+1}, \dots, \mathcal{X}_{i_k})$

2.3.2 Unabhängig identisch verteilte ZV

D 2.8 Eine Folge von ZV ist **(1)** unabh. falls X_i unabh. sind und **(2)** uiv, falls unabh. und die ZV dieselbe Verteilungsf. haben, also: $\forall i, j \quad F_{\mathcal{X}_i} = F_{\mathcal{X}_j}$

2.4 Transformation von Zufallsvariablen

Da ZV Funk. $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sind, mit komposition neue ZV aus and. ZV, bspw: $Z_1 = \exp(\mathcal{X}_1)$ oder $Z_2 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$

2.5 Konstruktion von Zufallsvariablen

D 2.9 (Bernoulli ZV) mit param. $p \in [0, 1]$ falls $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 0] = 1 - p$ und $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$. Not.: $\mathcal{X} \sim \text{Ber}(p)$

T 2.10 ($\exists$ -T v. Kolmogorov) $\exists$ W-Raum und n. endl. uiv Folge von $\mathcal{X}_i \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$

D 2.11 ZV U heisst **gleichverteilt auf** $[0, 1]$, falls

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \text{ Wir schreiben } U \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

T 2.12 $\mathcal{X}_i$ wie oben, da $\mathcal{X}_i(\omega) \in \{0, 1\}$ konvergiert $\mathcal{Y}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathcal{X}_n(\omega)$ absolut, mit $\mathcal{Y}(\omega) \in [0, 1]$. $\mathcal{Y} \sim \mathcal{U}([0, 1])$

D 2.13 (Pseudoinverse) von F ist $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Def: $\forall \alpha \in (0, 1) \quad F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\}$

T 2.14 (Inversionsmethode) F erfüllt eig. v. T2.4, $U \sim \mathcal{U}(\dots)$, dann hat ZV $X = F^{-1}(U)$ die Verteilfunkt. $F_X = F$

B 2.15 X wohldefiniert mit $X(\omega) = F^{-1}(U(\omega))$ falls $U(\omega) \in (0, 1)$ und $X(\omega) = 0$ sonst.

T 2.16 $F_1, \dots$ Folge von Funk. mit eig. v. T2.4. Dann $\exists$ W-Raum und Folge von unabhängigen ZV X_i , sodass:

- $\forall i \quad X_i$ has F_i (also $\forall x \quad \mathbb{P}[X_i \leq x] = F_i(x)$)
- $X_1, X_2, \dots$ sind unabhängig.

3 Diskrete und stetige ZV