Wahrscheinlichkeit und Statistik

Janis Hutz
https://janishutz.com

25. März 2026

1 Basics

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Begriff Ω ***Grundraum***, $\omega \in \Omega$ ***Elementarereignis***

Def *(Sigma-Algebra)* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra, falls:

E1. $\Omega \in \mathcal{F}$

E2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ (A Ereignis $\Rightarrow$ nicht A auch)

E3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
($A_1, \dots$ Ereignisse $\Rightarrow A_1$ oder A_2 oder $\dots$ ein Ereignis)

Bsp σ-Algebren bei 1x Würfeln ($\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$)

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2,3,4,5,6\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, dabei $|\mathcal{F}| = 64$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \Omega\}$

Keine σ-Algeben sind bspw:

- $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ (Komplementärereignis $\emptyset$ fehlt, E2 verletzt)
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{1\}, \{2,3,4,5,6\}, \Omega\}$
(E3 verletzt, da bspw $\{4,5,6\} \cup \{1\} \notin \mathcal{F}$)

1.1.1 Wahrscheinlichkeitsmass

Def *(W.M)* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ mit $A \mapsto \mathbb{P}[A]$, notiert $(\Omega, \mathcal{F})$, falls folgende Eigenschaften gelten

E1. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

E2. (σ-***Additivität***) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$,
falls $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *(disjunkte Vereinigung)*

Bsp Wieder mit Würfeln und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, sind W.M:

- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{6}$
- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i \in A} p_i$ (p_i dabei prob. Zahl i würfeln; $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$ ist für fairen Würfel)

1.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

Def *(W.R)* ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Begriff A Ereignis, ***tritt (nicht) ein*** (für ω), if $\omega \in (\notin) A$

Bem $A = \varnothing$ tritt niemals ein, $A = \Omega$ immer.

1.2 Beispiele von Wahrscheinlichkeitsräumen

Def *(Laplace Modell)* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] \overset{\text{def}}{=} \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$, $\mathbb{P}$ ist W.M.

Bsp Auf Kreis mit $n \geq 3$ Punkten, Modell für Nachbaren ist: $A = \{\{1,2\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ für
$\Omega = \{E \subseteq \{1, \dots, n\} \mid |E| = 2\}$, also $\mathbb{P}[A] = \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}$

Bsp W. 1. mal Kopf ist bei Wurf k: $p_k = p^{k-1}(1-p)$

1.3 Eigenschaften/Interp. von Ereignissen

T $\mathcal{F}$ σ-Algebra. Es gilt: **E4.** $\varnothing \in \mathcal{F}$

E5. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=A}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

E6. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

E7. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

A^C	A tritt ***nicht*** ein
$A \cap B$	A ***und*** B treten ein
$A \cup B$	A ***oder*** B treten ein
$A \Delta B$	entweder A ***oder*** B tritt ein
$A \subseteq B$	B tritt ein, falls A eintritt
$A \cap B = \varnothing$	A und B nicht gleichzeitig $\forall \omega \in \Omega$
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit A_1, A_2, A_3 paarw. disj.	nur eines von A_1, A_2, A_3 kann eintreten

Wir wählen nicht immer $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, bspw. für mehrstufige Experimente ist dies nicht ideal (k. Filtern, Überabzählbarkeit)

1.4 Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsmasse

T $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$, A Ereignis:

E1. Es gilt $\mathbb{P}[\varnothing] = 0$

E2. ***Additivität*** $k \geq 1$, $A_1, \dots, A_k$ paarw. disj. Ereignisse:
$\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_k]$

E3. $\mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$

E4. B Ereignis, dann $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

1.4.1 Nützliche Ungleichungen

T *(Monot.)* $A, B \in \mathcal{F}$, dann $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

T *(Union Bound)* Für $A_1, A_2, \dots$ (mögl. disj.) gilt: $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$. Auch für endl. n.-leere Ereignisse

1.4.2 Anwendungen der Ungleichungen

Sie sind nützlich für schwer zu berechnende W.

T (A_n) mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ (mon. wachsend). Dann:
$$\lim_{n \to \infty} P[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$$
und für (B_n) mit $B_n \supseteq B_{n+1}$ (mon. fallend) gilt:
$\lim_{n \to \infty} P[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]$

Bem Mit Monotonie: $\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_{n+1}]$ und $\mathbb{P}[B_n] \geq \mathbb{P}[B_{n+1}]$. Grenzwerte oben wohldefiniert.

1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Def Für $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$:
$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \quad (= \mathbb{P}[A] \text{ wenn } B \text{ eingetreten ist})$$

Bem $\mathbb{P}[B|B] = 1$

T $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, dann ist $\mathbb{P}[\cdot|B]$ ein W-Mass auf Ω

T *(Totale W.)* $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$ mit B_is eine Partition von Ω, mit B_i paarw. disj. und $\mathbb{P}[B_i] > 0 \; \forall 1 \leq i \leq n$. Dann:
$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

T *(Bayes)* B_i wie oben, dann $\forall A$ mit $\mathbb{P}[A] > 0$:
$$\forall i = 1, \dots, n \quad \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

1.6 Unabhängigkeit

Def $A, B \in \mathcal{F}$ ***unabh.*** falls $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

Bem Falls $\mathbb{P}[A] \in \{0,1\}$: $\forall B \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$. Falls A unabh. von sich selbst ($\mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$), dann $\mathbb{P}[A] \in \{0,1\}$. ***Implik.***: A unabh. v. $B \Leftrightarrow A$ unabh. v. B^C

T Sei $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Dann ist equivalent:

(i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ *(A und B unabhängig)*

(ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ *(Eintreten von B beinflusst A nicht)*

(iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ *(Eintreten von A beinflusst B nicht)*

Def I eine beliebige Menge. $(A_i)_{i \in I}$ ***unabhängig*** falls:
$$\forall j \subseteq I \text{ endlich} \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

2 Zufallsvar., Verteilungsfunktionen

2.1 Abstrakte Definition

Def *(Zufallsvariable)* kurz Z.V, ist $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt: $f = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \le a\} \in \mathcal{F}$ (notwendinge Bedingung für Wohldefiniertheit von $\mathbb{P}[f]$)

Notation Ohne ω: $\{X \le a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le a\}$, etc

2.2 Verteilungsfunktion

Def $F_\mathcal{X} : \mathbb{R} \to [0,1]$, def: $\forall a \in \mathbb{R} \quad F_\mathcal{X}(a) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \le a]$

T $a < b \in \mathbb{R}$. Dann: $\mathbb{P}[a < X \le b] = F(b) - F(a)$

T $\mathcal{X}$ Z.V. auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und V.F. $F = F_\mathcal{X}$. Eig.:

1. F ist monoton wachsend
2. F ist rechtsseitig ($F(a) = \lim_{h \downarrow 0} F(a+h)\ \forall a \in \mathbb{R}$)
3. $\lim\limits_{a \to -\infty} F(a) = 0$ und $\lim\limits_{a \to \infty} F(a) = 1$

2.3 Unabhängigkeit

Def Z.V. $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ sind ***unabh.*** falls $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \le x_1, \dots, \mathcal{X}_n \le x_n] = \mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \le x_1] \cdots \mathbb{P}[\mathcal{X}_n \le x_n]$

Bem Alternativ: ZVs unabhängig, falls $\forall I_1 \subseteq \mathbb{R}, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle $\{\mathcal{X}_1 \in I_1\}, \dots, \{\mathcal{X}_n \in I_n\}$ unabhängig

2.3.1 Gruppierung

T n ZV $\mathcal{X}_i$ und $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ sind indizes und $\phi_1, \dots, \phi_k$ Abbildungen. Dann sind unabhängig: $Y_1 = \phi_1(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{i_1}), \dots, Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1}, \dots, X_{i_k})$

2.3.2 Unabhängig identisch verteilte ZV

Def Eine Folge von ZV ist ***(1)*** unabh. falls X_i unabh. sind und ***(2)*** uiv, falls unabh. und die ZV dieselbe Verteilungsf. haben, also: $\forall i, j \quad F_{\mathcal{X}_i} = F_{\mathcal{X}_j}$

2.4 Transformation von Zufallsvariablen

Da ZV Funk. $\Omega \to \mathbb{R}$ sind, mit komposition neue ZV aus and. ZV, bspw: $Z_1 = \exp(\mathcal{X}_1)$ oder $Z_2 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$

2.5 Konstruktion von Zufallsvariablen

Def *(Bernoulli ZV)* mit param. $p \in [0,1]$ falls $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 0] = 1 - p$ und $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$. Not.: $\mathcal{X} \sim$ Ber(p)

T *($\exists$-T v. Kolmogorov)* $\exists$ W-Raum und n. endl. uiv Folge von $\mathcal{X}_i \sim$ Ber $\left(\frac{1}{2}\right)$

Def ZV U heisst ***gleichverteilt auf*** [0, 1], falls

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$. Wir schreiben $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

T $\mathcal{X}_i$ wie oben, da $\mathcal{X}_i(\omega) \in \{0,1\}$ konvergiert $\mathcal{Y}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathcal{X}_n(\omega)$ absolut, mit $\mathcal{Y}(\omega) \in [0,1]$. $\mathcal{Y} \sim \mathcal{U}([0,1])$

Def *(Pseudoinverse)* von F ist $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$. Def: $\forall \alpha \in (0,1) \quad F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \ge \alpha\}$

T *(Inversionsmethode)* F erfüllt eig. v. T2.4, $U \sim \mathcal{U}(\dots)$, dann hat ZV $X = F^{-1}(U)$ die Verteilfunk. $F_X = F$

Bem X wohldefiniert mit $X(\omega) = F^{-1}(U(\omega))$ falls $U(\omega) \in (0,1)$ und $X(\omega) = 0$ sonst.

T $F_1, \dots$ Folge von Funk. mit eig. v. T2.4. Dann $\exists$ W-Raum und Folge von unabhängigen ZV X_i, sodass:

- $\forall i\ X_i$ has F_i (also $\forall x\ \mathbb{P}[X_i \le x] = F_i(x)$)
- $X_1, X_2, \dots$ sind unabhängig.

3 Diskrete und stetige ZV

3.1 Stetigkeit der Verteilungsfunktion

T *(W. Punkt)* Für Z.V $\mathcal{X}$ und V.F $F_\mathcal{X}$ gilt $\forall a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}[\mathcal{X} = a] = F(a) - F(a-)$ mit $F(a-) := \lim\limits_{h \downarrow 0} F(a-h)$.

$\to$ F in a n. stetig, dann "Sprunghöhe" $F(a) - F(a-) = \mathbb{P}[\mathcal{X} = a]$

$\to$ F stetig in a, dann $\mathbb{P}[\mathcal{X} = a] = 0$

3.2 Fast sichere Ereignisse

Def $A \in \mathcal{F}$ tritt ***fast sicher*** (f.s.) ein, falls $\mathbb{P}[A] = 1$.

Bem Für allg. Mengen: A f.s., falls $\exists A' \subseteq A \mid \mathbb{P}[A'] = 1$

3.3 Diskrete Zufallsvariablen

Def Z.V. $\mathcal{X}$ ist ***diskret***, falls endl. oder abzählb. Menge $W \subsetneq \mathbb{R}$ existiert, s.d. $\mathbb{P}[\mathcal{X} \in W] = 1$ (Werte v. $\mathcal{X}$ f.s. in W)

Bem Falls der Grundraum Ω endlich oder abzählbar ist, dann ist jede Z.V. $\mathcal{X}$ diskret.

Def *(Verteilung)* Für Z.V. $\mathcal{X}$ mit W endl. oder abzählb. $(p(x))_{x \in W} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in W\ p(x) := \mathbb{P}[\mathcal{X} = x]$

T $(p(x))_{x \in W} = \sum_{x \in W} p(x) = 1$

Bem $\forall (p(x))_{x \in W}\ \exists$ Z.V. mit dieser Verteilung. Können desh. schreiben: "Sei $\mathcal{X}$ disk. Z.V. mit Verteilung $(p(x))_{x \in W}$"

3.3.1 Zusammenhang Verteilung, Verteilungsfunktion

T $\mathcal{X}$ disk. Z.V. wie oben, dann ist Verteilungsfunktion: $\forall x \in \mathbb{R}\ F_\mathcal{X}(x) = \sum_{\substack{y \in W \\ y \le x}} p(y)$. **Umgekehrt:** $p(x)$ ist die "Sprunghöhe" im Punkt $x \in W$, W pos. Sprünge in $F_\mathcal{X}$

3.4 Verteilungen

3.4.1 Bernoulli-Verteilung

Def $\mathcal{X} \sim$ Ber(p): $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 0] = 1 - p$ und $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$

3.4.2 Binomialverteilung

Def $\mathcal{X} \sim$ Bin(n,p), falls $\forall k \in \{0, \dots, n\}\ \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Bem $\sum_{k=0}^{n} p(k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = (p + 1 - p)^n = 1$

T $X_i \sim$ Ber(p_i) unab: $(S_n := \sum_{i=0}^{n} X_i) \sim$ Ber(n,p)

Bem Bin$(1,p)$ ist Ber(p) verteilt. Für $X, Y \sim$ Bin(n_i, p) mit X, Y unabhängig dann ist $X + Y \sim$ Bin$(n_1 + n_2, p)$

3.4.3 Geometrische Verteilung

Warten auf den ersten Erfolg (in ∞ Folge von Bernoulli-Experimenten)

Def $\mathcal{X} \sim$ Geom(p) mit $W = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ falls $\forall k \in W\ \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = (1-p)^{k-1} \cdot p$

Bem $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$, da wir Konvetion $a^0 = 1$ verwenden.

Bem $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$

T $X_i \sim$ Ber(p) für $i \in \mathbb{N}$. Dann $(T := \min\{n \ge 1 \mid X_n = 1\}) \sim$ Geom(p)

Bem $T = \infty$ ist möglich, $\mathbb{P}[T = \infty] = 0$

T $T \sim$ Geom(p), dann $\forall n \ge 0\ \forall k \ge 1\ \mathbb{P}[T \ge n + k \mid T > n] = \mathbb{P}[T \ge k]$

3.4.4 Negativbinomiale Verteilung

Warten auf den r-ten Erfolg (in ∞ Folge von Bernoulli-Experimenten)

Def $\mathcal{X} \sim$ NBin(r,p), falls

$$\forall k \in \{r, r+1, \dots\} \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

T $\mathcal{X}_i \sim$ Ber(p), dann $T_r := \inf\left\{n \ge 1 \,\middle|\, \sum_{l=1}^{n} \mathcal{X}_l = r\right\} \sim$ NBin(r,p)

Bem $\mathcal{X} := \sum_{i=1}^{r} \mathcal{X}_i \sim$ NBin(r,p) für $\mathcal{X}_i \sim$ Geom(p)

3.4.5 Hypergeometrische Verteilung

r Elemente vom Typ I, $n - r$ El. vom Typ II, m davon gezogen, ohne Zurücklegen

Def $\mathcal{X} \sim$ H(n,r,m), falls

$$\forall k \in \{0, \dots, \min(m,r)\} \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

3.4.6 Poisson-Verteilung

Def $\mathcal{X} \sim$ Poisson(λ) mit $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$, falls $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

T Für $n \in \mathbb{N}$ Z.V. $\mathcal{X}_i \sim$ Bin $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ und $\mathcal{N} \sim$ Poisson(λ): $\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}[\mathcal{X}_i = k] = \mathbb{P}[\mathcal{N} = k]$

3.5 Stetige Zufallsvariablen

Def *(Stetig verteilte Z.V)* $\mathcal{X}$ stetig, falls $\exists f_{\mathcal{X}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, s.d. V.F. $F_{\mathcal{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mathcal{X}}(t)$ dt. $f_{\mathcal{X}}$ ist Dichte (pdf) von $\mathcal{X}$

T Sei $F_{\mathcal{X}}$ st. stückw. diff. auf Partition $-\infty = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \infty$. Dann $\mathcal{X}$ stetig, mit a_k beliebig und

$$f_{\mathcal{X}} = \begin{cases} F'_{\mathcal{X}}(x) & \exists k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} : x \in (x_k, x_{k+1}) \\ a_k & x \in \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \end{cases}$$

Bem $f_{\mathcal{X}}$ fast analog zu Gew.F $p_{\mathcal{X}}$. Also: $(\Sigma, p_{\mathcal{X}}) \mapsto (\int, f_{\mathcal{X}})$ vom diskreten zu stetigen Fall

3.6 Stetige Verteilungen

3.6.1 Gleichverteilung

Def $\mathcal{X} \sim \mathcal{U}([a,b])$, falls $f_{\mathcal{X}} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Bem $\mathbb{P}[\mathcal{X} \in [c, c+l]] = \frac{l}{b-a}$, $F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$

3.6.2 Exponentialverteilung

Wie Geomemtrische Verteilung warten auf Erfolg

Def $\mathcal{X} \sim \text{Exp}(\lambda)$, falls $\forall x \in \mathbb{R} f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Bem *(Gedächtnisl.)* $\mathbb{P}[\mathcal{X} > t + s \mid \mathcal{X} > s] = \mathbb{P}[\mathcal{X} > t]$

Bem *(Verteilungsfunktion)* $F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

3.6.3 Cauchy-Verteilung

Def $\mathcal{X} \sim \text{Cauchy}(x_0, \gamma)$, falls $f_{\mathcal{X}}(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\gamma}{\gamma^2 + (x - x_0)^2}$

Bem *(Verteilungsfunk.)* $F_{\mathcal{X}}(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \arctan\left(\dfrac{x - x_0}{\gamma}\right)$

Def *(Langschwänzige Verteilung)* für $|x| \to \infty$ nur sehr langsam gegen 0 (quadratisch vs. exponentiell bei Norm. V)

3.6.4 Normalverteilung

Def $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ falls $f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, mit σ Standardabweichung. Auch: Gauss'sche Verteilung

Def *(Standardnormalverteilung)* $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0,1)$:
$f_{\mathcal{X}} = \varphi$ und $\mathbb{F}_{\mathcal{X}} = \Phi = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)$ dt $= \frac{1}{\sqrt{2\phi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}$ dt

T $cX \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann $\frac{\mathcal{X}-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, also:

$$F_{\mathcal{X}}(x) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \leq x] = \mathbb{P}\left[\frac{\mathcal{X} - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Bsp für Phänomene modellierbar mit Normalverteilung:

- Streuung von Messwerten um Mittelwert
- Grösse und Gewicht der Bevölkerung
- Renditen von Aktien

Bem Für $\mathcal{X}_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ unabhängig gilt:

$$\mathcal{Y} := \mu_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{X}_k \sim \mathcal{N}\left(\mu_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k, \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2\right)$$

Bem Für $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ und $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ gilt $\mu + \sigma\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (nützlich für Simulation)

Bem $\mathbb{P}[|\mathcal{X} - \mu| \geq 3\sigma] \leq 0.0027$

4 Erwartungswert

4.1 Allgemeiner Erwartungswert

Def Für $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \int_0^{\infty} (1 - F_{\mathcal{X}}(x))$ dx

Bem $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ immer definiert und endlich oder unendlich

T $\mathcal{X}$ n.-neg. Dann: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] \geq 0$. $=$, wenn $\mathcal{X} = 0$ fast sicher

Def $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \mathbb{E}[\mathcal{X}_+] - \mathbb{E}[\mathcal{X}_-]$ mit $\mathcal{X}_-$ auch n.-neg.

Bem $|\mathcal{X}| = \mathcal{X}_+ + \mathcal{X}_-$. Für $\mathcal{X} \geq 0$ ist $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ immer definiert. Falls $\mathcal{X}$ kein konst. Vorzeichen, $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ undef.

Bem $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \int_0^{\infty} (1 - F_{\mathcal{X}}(x))$ dx $- \int_{-\infty}^{0} F_{\mathcal{X}}(x)$

4.2 Diskrete Zufallsvariablen

T Für $\mathcal{X}$ mit Werten fast sicher in W:

$$\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \sum_{x \in W} x \cdot \mathbb{P}[\mathcal{X} = x] = \sum_{x \in W} x \cdot p_{\mathcal{X}}(x)$$

Bem $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$ wohldefiniert falls $(x \cdot p_{\mathcal{X}}(x))_{x \in W}$ abs. konv.

4.2.1 Beispiele

- $\mathcal{X} \sim \text{Ber}(p)$: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = p$
- $\mathcal{X} \sim \text{Bin}(n, p)$: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = np$
- $\mathcal{X} \sim \text{Poisson}(\lambda)$: $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \lambda$