Wahrscheinlichkeit und Statistik

Janis Hutz
https://janishutz.com

16. März 2026

1 Basics

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Begriff Ω ***Grundraum***, $\omega \in \Omega$ ***Elementarereignis***

D 1.1 *(Sigma-Algebra)* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra, falls:

E1. $\Omega \in \mathcal{F}$

E2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ (A Ereignis $\Rightarrow$ nicht A auch)

E3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ ($A_1, \ldots$ Ereignisse $\Rightarrow A_1$ oder A_2 oder $\ldots$ ein Ereignis)

Bsp σ-Algebren bei 1x Würfeln ($\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$)

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2,3,4,5,6\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, dabei $|\mathcal{F}| = 64$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \Omega\}$

Keine σ-Algeben sind bspw:

- $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ (Komplementärereignis $\emptyset$ fehlt, E2 verletzt)
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{1\}, \{2,3,4,5,6\}, \Omega\}$ (E3 verletzt, da bspw $\{4,5,6\} \cup \{1\} \notin \mathcal{F}$)

1.1.1 Wahrscheinlichkeitsmass

D 1.2 *(W.M)* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ mit $A \mapsto \mathbb{P}[A]$, notiert $(\Omega, \mathcal{F})$, falls folgende Eigenschaften gelten

E1. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

E2. (σ-***Additivität***) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$, falls $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *(disjunkte Vereinigung)*

Bsp Wieder mit Würfeln und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, sind W.M:

- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{6}$
- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i \in A} p_i$ (p_i dabei prob. Zahl i würfeln; $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$ ist für fairen Würfel)

1.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

D 1.3 *(W.R)* ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Begriff A Ereignis, ***tritt (nicht) ein*** (für ω), if $\omega \in (\notin) A$

B 1.4 $A = \varnothing$ tritt niemals ein, $A = \Omega$ immer.

1.2 Beispiele von Wahrscheinlichkeitsräumen

D 1.5 *(Laplace Modell)* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] \overset{\text{def}}{=} \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$, $\mathbb{P}$ ist W.M.

Bsp Auf Kreis mit $n \geq 3$ Punkten, Modell für Nachbaren ist: $A = \{\{1,2\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ für $\Omega = \{E \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid |E| = 2\}$, also $\mathbb{P}[A] = \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}$

Bsp W. 1. mal Kopf ist bei Wurf k: $p_k = p^{k-1}(1-p)$

1.3 Eigenschaften/Interp. von Ereignissen

T 1.6 $\mathcal{F}$ σ-Algebra. Es gilt: **E4.** $\varnothing \in \mathcal{F}$

E5. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=A}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

E6. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

E7. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

A^C	A tritt ***nicht*** ein
$A \cap B$	A ***und*** B treten ein
$A \cup B$	A ***oder*** B treten ein
$A \Delta B$	entweder A ***oder*** B tritt ein
$A \subseteq B$	B tritt ein, falls A eintritt
$A \cap B = \varnothing$	A und B nicht gleichzeitig $\forall \omega \in \Omega$
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit A_1, A_2, A_3 paarw. disj.	nur eines von A_1, A_2, A_3 kann eintreten

Wir wählen nicht immer $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, bspw. für mehrstufige Experimente ist dies nicht ideal (k. Filtern, Überabzählbarkeit)

1.4 Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsmasse

T 1.7 $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$, A Ereignis:

E1. Es gilt $\mathbb{P}[\varnothing] = 0$

E2. ***Additivität*** $k \geq 1$, $A_1, \ldots, A_k$ paarw. disj. Ereignisse: $\mathbb{P}[A_1 \cup \cdots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \cdots + \mathbb{P}[A_k]$

E3. $\mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$

E4. B Ereignis, dann $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

1.4.1 Nützliche Ungleichungen

T 1.8 *(Monot.)* $A, B \in \mathcal{F}$, dann $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

T 1.9 *(Union Bound)* Für $A_1, A_2, \ldots$ (mögl. disj.) gilt: $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$. Auch für endl. n.-leere Ereignisse

1.4.2 Anwendungen der Ungleichungen

Sie sind nützlich für schwer zu berechnende W.

T 1.11 (A_n) mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ (mon. wachsend). Dann: $\lim_{n \to \infty} P[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$ und für (B_n) mit $B_n \supseteq B_{n+1}$ (mon. fallend) gilt: $\lim_{n \to \infty} P[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]$

B 1.12 Mit Monotonie: $\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_{n+1}]$ und $\mathbb{P}[B_n] \geq \mathbb{P}[B_{n+1}]$. Grenzwerte oben wohldefiniert.

1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

D 1.13 Für $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \quad (= \mathbb{P}[A] \text{ wenn } B \text{ eingetreten ist})$$

B 1.14 $\mathbb{P}[B|B] = 1$

T 1.15 $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, dann ist $\mathbb{P}[\cdot|B]$ ein W-Mass auf Ω

T 1.16 *(Totale W.)* $\Omega = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ mit B_is eine Partition von Ω, mit B_i paarw. disj. und $\mathbb{P}[B_i] > 0 \; \forall 1 \leq i \leq n$. Dann:

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

T 1.17 *(Bayes)* B_i wie oben, dann $\forall A$ mit $\mathbb{P}[A] > 0$:

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

1.6 Unabhängigkeit

D 1.18 $A, B \in \mathcal{F}$ ***unabh.*** falls $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

B 1.19 Falls $\mathbb{P}[A] \in \{0,1\}$: $\forall B \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$. Falls A unabh. von sich selbst ($\mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$), dann $\mathbb{P}[A] \in \{0,1\}$. ***Implik.***: A unabh. v. $B \Leftrightarrow A$ unabh. v. B^C

T 1.20 Sei $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Dann ist equivalent:

(i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ *(A und B unabhängig)*

(ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ *(Eintreten von B beinflusst A nicht)*

(iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ *(Eintreten von A beinflusst B nicht)*

D 1.21 I eine beliebige Menge. $(A_i)_{i \in I}$ ***unabhängig*** falls:

$$\forall j \subseteq I \text{ endlich} \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

2 Zufallsvar., Verteilungsfunktionen

2.1 Abstrakte Definition

D 2.1 *(Zufallsvariable)* kurz Z.V, ist $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt: $f = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ (notwendinge Bedingung für Wohldefiniertheit von $\mathbb{P}[f]$)

Notation Ohne ω: $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$, etc

2.2 Verteilungsfunktion

D 2.2 $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, def: $\forall a \in \mathbb{R} \quad F_{\mathcal{X}}(a) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \leq a]$

T 2.3 $a < b \in \mathbb{R}$. Dann: $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$

T 2.4 $\mathcal{X}$ Z.V. auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und V.F. $F = F_{\mathcal{X}}$. Eig.:

1. F ist monoton wachsend
2. F ist rechtsseitig ($F(a) = \lim_{h\downarrow 0} F(a + h)\ \forall a \in \mathbb{R}$)
3. $\lim\limits_{a\to-\infty} F(a) = 0$ und $\lim\limits_{a\to\infty} F(a) = 1$

2.3 Unabhängigkeit

D 2.5 Z.V. $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ sind ***unabh.*** falls $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \leq x_1, \ldots, \mathcal{X}_n \leq x_n] = \mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \leq x_1] \cdots \mathbb{P}[\mathcal{X}_n \leq x_n]$

B 2.6 Alternativ: ZVs unabhängig, falls $\forall I_1 \subseteq \mathbb{R}, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle $\{\mathcal{X}_1 \in I_1\}, \ldots, \{\mathcal{X}_n \in I_n\}$ unabhängig

2.3.1 Gruppierung

T 2.7 n ZV $\mathcal{X}_i$ und $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ sind indizes und $\phi_1, \ldots, \phi_k$ Abbildungen. Dann sind unabhängig: $Y_1 = \phi_1(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_{i_1}), \ldots, Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1}, \ldots, X_{i_k})$

2.3.2 Unabhängig identisch verteilte ZV

D 2.8 Eine Folge von ZV ist ***(1)*** unabh. falls X_i unabh. sind und ***(2)*** uiv, falls unabh. und die ZV dieselbe Verteilungsf. haben, also: $\forall i, j \quad F_{\mathcal{X}_i} = F_{\mathcal{X}_j}$

2.4 Transformation von Zufallsvariablen

Da ZV Funk. $\Omega \to \mathbb{R}$ sind, mit komposition neue ZV aus and. ZV, bspw: $Z_1 = \exp(\mathcal{X}_1)$ oder $Z_2 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$

2.5 Konstruktion von Zufallsvariablen

D 2.9 *(Bernoulli ZV)* mit param. $p \in [0, 1]$ falls $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 0] = 1 - p$ und $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$. Not.: $\mathcal{X} \sim \text{Ber}(p)$

T 2.10 *($\exists$-T v. Kolmogorov)* $\exists$ W-Raum und n. endl. uiv Folge von $\mathcal{X}_i \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$

D 2.11 ZV U heisst ***gleichverteilt auf*** [0, 1], falls

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

. Wir schreiben $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$

T 2.12 $\mathcal{X}_i$ wie oben, da $\mathcal{X}_i(\omega) \in \{0, 1\}$ konvergiert $\mathcal{Y}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mathcal{X}_n(\omega)$ absolut, mit $\mathcal{Y}(\omega) \in [0, 1]$. $\mathcal{Y} \sim \mathcal{U}([0, 1])$

D 2.13 *(Pseudoinverse)* von F ist $F^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R}$. Def: $\forall \alpha \in (0, 1) \quad F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\}$

T 2.14 *(Inversionsmethode)* F erfüllt eig. v. T2.4, $U \sim \mathcal{U}(\ldots)$, dann hat ZV $X = F^{-1}(U)$ die Verteilfunk. $F_X = F$

B 2.15 X wohldefiniert mit $X(\omega) = F^{-1}(U(\omega))$ falls $U(\omega) \in (0, 1)$ und $X(\omega) = 0$ sonst.

T 2.16 $F_1, \ldots$ Folge von Funk. mit eig. v. T2.4. Dann $\exists$ W-Raum und Folge von unabhängigen ZV X_i, sodass:

- $\forall i\ X_i$ has F_i (also $\forall x\ \mathbb{P}[X_i \leq x] = F_i(x)$)
- $X_1, X_2, \ldots$ sind unabhängig.

3 Diskrete und stetige ZV

3.1 Stetigkeit der Verteilungsfunktion

T 3.1 *(W. Punkt)* Für Z.V $\mathcal{X}$ und V.F $F_{\mathcal{X}}$ gilt $\forall a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}[\mathcal{X} = a] = F(a) - F(a-)$ mit $F(a-) := \lim\limits_{h\downarrow 0} F(a - h)$.

$\to$ F in a n. stetig, dann "Sprunghöhe" $F(a) - F(a-) = \mathbb{P}[\mathcal{X} = a]$

$\to$ F stetig in a, dann $\mathbb{P}[\mathcal{X} = a] = 0$

3.2 Fast sichere Ereignisse

D 3.2 $A \in \mathcal{F}$ tritt ***fast sicher*** (f.s.) ein, falls $\mathbb{P}[A] = 1$.

B 3.3 Für allg. Mengen: A f.s., falls $\exists A' \subseteq A \mid \mathbb{P}[A'] = 1$

3.3 Diskrete Zufallsvariablen

D 3.4 Z.V. $\mathcal{X}$ ist ***diskret***, falls endl. oder abzählb. Menge $W \subsetneq \mathbb{R}$ existiert, s.d. $\mathbb{P}[\mathcal{X} \in W] = 1$ (Werte v. $\mathcal{X}$ f.s. in W)

B 3.5 Falls der Grundraum Ω endlich oder abzählbar ist, dann ist jede Z.V. $\mathcal{X}$ diskret.

D 3.6 *(Verteilung)* Für Z.V. $\mathcal{X}$ mit W endl. oder abzählb. $(p(x))_{x\in W} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in W\ p(x) := \mathbb{P}[\mathcal{X} = x]$

T 3.7 $(p(x))_{x\in W} = \sum_{x\in W} p(x) = 1$

B 3.8 $\forall (p(x))_{x\in W}$ $\exists$ eine Z.V. mit dieser Verteilung. Können desh. schreiben: "Sei $\mathcal{X}$ disk. Z.V. mit Verteilung $(p(x))_{x\in W}$"

3.3.1 Zusammenhang Verteilung, Verteilungsfunktion

T 3.9 $\mathcal{X}$ disk. Z.V. wie oben, dann ist Verteilungsfunktion: $\forall x \in \mathbb{R}\ F_{\mathcal{X}}(x) = \sum_{\substack{y\in W \\ y\leq x}} p(y)$. **Umgekehrt:** $p(x)$ ist die "Sprunghöhe" im Punkt $x \in W$, W pos. Sprünge in $F_{\mathcal{X}}$

3.4 Verteilungen

3.4.1 Bernoulli-Verteilung

D 3.10 $\mathcal{X} \sim \text{Ber}(p)$: $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 0] = 1 - p$ und $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$

3.4.2 Binomialverteilung

D 3.11 $\mathcal{X} \sim \text{Bin}(n, p)$, falls $\forall k \in \{0, \ldots, n\}\ \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

B 3.12 $\sum_{k=0}^{n} p(k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = (p + 1 - p)^n = 1$

T 3.13 $X_i \sim \text{Ber}(p_i)$ unab: $(S_n := \sum_{i=0}^{n} X_i) \sim \text{Ber}(n, p)$

B 3.14 $\text{Bin}(1, p)$ ist $\text{Ber}(p)$ verteilt. Für $X, Y \sim \text{Bin}(n_i, p)$ mit X, Y unabhängig dann ist $X + Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$

3.4.3 Geometrische Verteilung

D 3.15 $\mathcal{X} \sim \text{Geom}(p)$ mit $W = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ falls $\forall k \in W\ \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = (1 - p)^{k-1} \cdot p$

B 3.16 $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$, da wir Konvetion $a^0 = 1$ verwenden.

B 3.17 $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$

T 3.18 $X_i \sim \text{Ber}(p)$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann $(T := \min\{n \geq 1 \mid X_n = 1\}) \sim \text{Geom}(p)$

B 3.19 $T = \infty$ ist möglich, $\mathbb{P}[T = \infty] = 0$

T 3.20 $T \sim \text{Geom}(p)$, dann $\forall n \geq 0\ \forall k \geq 1\ \mathbb{P}[T \geq n + k | T > n] = \mathbb{P}[T \geq k]$

3.4.4 Poisson-Verteilung