Wahrscheinlichkeit und Statistik

Janis Hutz
https://janishutz.com

21. Februar 2026

1 Basics

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Begriff Ω ***Grundraum***, $\omega \in \Omega$ ***Elementarereignis***

D 1.1 *(Sigma-Algebra)* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra, falls:

E1. $\Omega \subseteq \mathcal{F}$
E2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ (A Ereignis $\Rightarrow$ nicht A auch)
E3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
($A_1, \ldots$ Ereignisse $\Rightarrow A_1$ oder A_2 oder ... ein Ereignis)

Bsp σ-Algebren beim einmal. Würfeln ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, dabei $|\mathcal{F}| = 64$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$

Keine σ-Algebren sind bspw:

- $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ (Komplementärereignis $\emptyset$ fehlt, E2 verletzt)
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$
(E3 verletzt, da bspw $\{4, 5, 6\} \cup \{1\} \notin \mathcal{F}$)

1.1.1 Wahrscheinlichkeitsmass

D 1.2 *(W.M)* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ mit $A \mapsto \mathbb{P}[A]$, notiert $(\Omega, \mathcal{F})$ und falls folgende Eigenschaften gelten

E1 $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
E2 (σ-***Additivität***) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$,
falls $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *(disjunkte Vereinigung)*

Bsp Wieder mit Würfeln und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, sind W.M:

- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{6}$
- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i \in A} p_i$ (p_i dabei prob. Zahl i würfeln; $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$ ist für fairen Würfel)

1.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

D 1.3 *(W.R)* ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Begriff A Ereignis, ***tritt (nicht) ein*** (für ω), if $\omega \in (\notin) A$