

# Analysis Cheat-Sheet

Janis Hutz  
<https://janishutz.com>

29. Dezember 2025

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Räume</b>	<b>2</b>
1.1 Reelle Zahlen . . . . .	2
1.3 Komplexe Zahlen . . . . .	2
<b>2 Folgen und Reihen</b>	<b>3</b>
2.1 Grenzwerte . . . . .	3
2.2 Der Satz von Weierstrass . . . . .	3
2.3 Limes Superior und Limes Inferior . . . . .	3
2.4 Cauchy Kriterium (Konvergenzkriterien) . . . . .	3
2.5 Der Satz von Bolzano-Weierstrass . . . . .	3
2.6 Folgen in Räumen ausserhalb der Reellen Zahlen . . . . .	3
2.7 Reihen . . . . .	3
<b>3 Stetige Funktionen</b>	<b>5</b>
3.1 Reellwertige Funktionen . . . . .	5
3.2 Stetigkeit . . . . .	5
3.3 Zwischenwertsatz . . . . .	5
3.4 Min-Max-Satz . . . . .	5
3.5 Satz über die Umkehrabbildung . . . . .	5
3.6 Reellwertige Exponentialfunktion . . . . .	5
3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen . . . . .	6
3.8 Trigonometrische Funktionen . . . . .	6
3.9 Pie (delicious) . . . . .	6
3.10 Grenzwerte von Funktionen . . . . .	6
<b>4 Differenzierbare Funktionen</b>	<b>7</b>
4.1 Ableiten . . . . .	7
4.2 Erste Ableitung: Wichtige Sätze . . . . .	7
4.3 Höhere Ableitungen . . . . .	7
4.4 Potenzreihen und Taylor Approximation . . . . .	8
4.5 Exercise Help . . . . .	8
<b>5 Riemann Integral</b>	<b>9</b>
5.1 Definition und Integrabilitätskriterien . . . . .	9
5.2 Integrierbare Funktionen . . . . .	9
5.3 Ungleichungen und Mittelwertsatz . . . . .	9
5.4 Fundamentalsatz der Differentialrechnung . . . . .	9
5.5 Integration einer konvergierenden Reihe . . . . .	10
5.6 Euler-McLaurin Summationsformel . . . . .	10
5.7 Stirling'sche Formel . . . . .	10
5.8 Uneigentliche Integrale . . . . .	10
5.9 Partialbruchzerlegung . . . . .	10
<b>6 Tabelle von Ableitungen und Stammfunktionen</b>	<b>11</b>

# 1 Räume

## 1.1 Reelle Zahlen

**S 1.1:** (Lindemann) Es gibt keine Gleichung der Form  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  mit  $a_i \in \mathbb{Q}$  so dass  $x = \pi$  eine Lösung ist

**K 1.8:** (Archimedisches Prinzip) Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  und  $y \in \mathbb{R}$ . Dann existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $y \leq n \cdot x$

### Max, Min, Betrag

### Definition 1.10

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann:

$$(i) \max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases} \quad (ii) \min\{x, y\} = \begin{cases} y & \text{falls } y \leq x \\ x & \text{falls } x \leq y \end{cases} \quad (iii) \text{Der Absolutbetrag von } x \in \mathbb{R} : |x| = \max\{x, -x\}$$

### Eigenschaften des Absolutbetrags

### Satz 1.11

$$(i) |x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (ii) |xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (iii) |x+y| \leq |x| + |y| \quad (iv) |x+y| \geq ||x| - |y||$$

**S 1.12:** (Young'sche Ungleichung)  $\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

### Schranken

### Definition 1.13

- (i)  $c \in \mathbb{R}$  obere Schranke von  $A$  falls  $\forall a \in A : a \leq c$ .  $A$  nach oben beschränkt falls eine obere Schranke für  $A$  existiert
- (ii)  $c \in \mathbb{R}$  untere Schranke von  $A$  falls  $\forall a \in A : a \geq c$ .  $A$  nach unten beschränkt falls eine untere Schranke für  $A$  existiert
- (iii) Element  $m \in \mathbb{R}$  **Maximum** von  $A$  falls  $m \in A$  und  $m$  obere Schranke von  $A$  ist
- (iv) Element  $m \in \mathbb{R}$  **Minimum** von  $A$  falls  $m \in A$  und  $m$  untere Schranke von  $A$  ist

### Supremum & Infimum

### Satz 1.16

- (i) Die kleinste obere Schranke von einer nach oben beschränkten Menge  $A$ , gennant das **Supremum** von  $A$ , ist definiert als  $c := \sup(A)$ . Es existiert nur falls die Menge nach oben beschränkt ist.
- (ii) Die grösste untere Schranke von einer nach unten beschränkten Menge  $A$ , gennant das **Infimum** von  $A$ , ist definiert als  $c := \inf(A)$ . Es existiert nur falls die Menge nach unten beschränkt ist.

### Supremum & Infimum

### Korollar 1.17

Sei  $A \subset B \subset \mathbb{R}$

$$(1) \text{ Falls } B \text{ nach oben beschränkt ist, gilt } \sup(A) \leq \sup(B) \quad (2) \text{ Falls } B \text{ nach unten beschränkt ist, gilt } \inf(B) \leq \inf(A)$$

## 1.3 Komplexe Zahlen

**Operationen:**  $i^2 = -1$  (NICHT  $i = \sqrt{-1}$  da sonst  $1 = -1$ ). Komplexe Zahl  $z_j = a_j + b_j i$ . **Addition, Subtraktion**  $(a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$ . **Multiplikation**  $(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$ . **Division**  $\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 b_2^2}i$ ;

**Teile:**  $\Re(a+bi) := a$  (Realteil),  $\Im(a+bi) := b$  (Imaginärteil),  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$  (modulus),  $\overline{a+bi} := a - bi$  (Komplexe Konjugation);

**Polarcoordinaten:**  $a+bi$  (Normalform),  $r \cdot e^{i\phi}$  (Polarform). Transformation polar  $\rightarrow$  normal:  $r \cdot \cos(\phi) + r \cdot \sin(\phi)i$ . Transformation normal  $\rightarrow$  polar:  $|z| \cdot e^{i \cdot \arcsin(\frac{b}{|z|})}$ ;

### Fundamentalsatz der Algebra

### Satz 1.18

Sei  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$  und sei

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}$$

Dann gibt es  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  so dass

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Die Menge  $\{z_1, \dots, z_n\}$  und die Vielfachheit der Nullstellen  $z_j$  sind eindeutig bestimmt.

**Surjektivität** Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$ , ist Surjektiv, g.d.w.  $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$  (stetige Funktion)

**Injektivität**  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

## 2 Folgen und Reihen

### 2.1 Grenzwerte

**D 2.5:** Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  heisst **konvergent** falls  $\exists l \in \mathbb{R}$  s.d.  $\forall \varepsilon > 0$  die Menge  $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$  endlich ist. Jede konvergente Folge ist beschränkt. **L 2.7:**  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1$  s.d.  $|a_n - l| < \varepsilon \ \forall n \geq N$

**S 2.9:**  $(a_n)_{n \geq 1}$  und  $(b_n)_{n \geq 1}$  konvergent,  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Dann gilt:

- (1)  $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ ;
- (2)  $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$  konvergent  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ ;
- (3) Falls zudem  $b_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$  und  $b \neq 0$ , dann gilt  $(a_n \div b_n)_{n \geq 1}$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \div b_n) = a \div b$ ;
- (4) Falls  $\exists K \geq 1$  mit  $a_n \leq b_n \ \forall n \geq K \Rightarrow a \leq b$

### 2.2 Der Satz von Weierstrass

**D 2.1:**  $(a_n)_{n \geq 1}$  **monoton wachsend (fallend)** falls  $a_n \leq a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ )  $\forall n \geq 1$

**S 2.2:** (*Weierstrass*)  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton wachsend (sinkend) und nach oben (unten) beschränkt konvergiert gegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$ ), genannt das Supremum und Infimum **Bsp 2.7:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

**L 2.8:** (*Bernoulli Ungleichung*)  $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \ \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

### 2.3 Limes Superior und Limes Inferior

Für  $(a_n)_{n \geq 1}$  definieren wir zwei monotone Folgen  $b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$  und  $c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ , dann ist  $b_n \leq b_{n+1} \ \forall n \geq 1$  und  $c_{n+1} \leq c_n \ \forall n \geq 1$ , und beide Folgen sind beschränkt. Zudem konvergieren beide und es gilt  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ . Ausserdem gilt:  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

### 2.4 Cauchy Kriterium (Konvergenzkriterien)

**L 2.1:**  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

**S 2.2:** (*Cauchy Kriterium*)  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergent  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1$  so dass  $|a_n - a_m| \leq \varepsilon \ \forall n, m \geq N$

### 2.5 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

**D 2.1:** (*Abgeschlossenes Intervall*) Teilmenge  $I \subseteq \mathbb{R}$  der Form wie unten zu sehen und der Länge  $\mathcal{L}(I) = b - a$  (für (1)) oder  $\mathcal{L}(I) = +\infty$ :

- (1)  $[a, b]; \ a \leq b; \ a, b \in \mathbb{R}$       (2)  $[a, +\infty[; \ a \in \mathbb{R}$       (3)  $] - \infty, a]; \ a \in \mathbb{R}$       (4)  $] - \infty, +\infty[ = \mathbb{R}$

Ein Intervall  $I$  ist abgeschlossen  $\Leftrightarrow$  Für jede konvergente Folge aus Elementen von  $I$  auch deren Grenzwerte in  $I$  enthalten sind

**S 2.6:** (*Cauchy-Cantor*) Sei  $I_1 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$  eine Folge abgeschlossener Intervalle mit  $\mathcal{L}(I_i) < +\infty$ . Dann ist  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ . Falls zudem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$ , dann enthält die Menge genau einen Punkt. **S 2.7:**  $\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar

**D 2.8:** (*Teilfolge von  $(a_n)_{n \geq 1}$* )  $(b_n)_{n \geq 1}$  wobei  $b_n = a_{l(n)}$  und  $l(n) \leq l(n+1) \ \forall n \geq 1$

**S 2.9:** (*Bolzano-Weierstrass*) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. Zudem:  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

### 2.6 Folgen in Räumen ausserhalb der Reellen Zahlen

**D 2.1:** Folgen in  $\mathbb{R}^d$  und  $\mathbb{C}$  werden gleich wie in  $\mathbb{R}$  notiert

**D 2.2:**  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathbb{R}^d$  heisst **konvergent** falls  $\exists a \in \mathbb{R}^d$  so dass  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1$  mit  $\|a_n - a\| \leq \varepsilon \ \forall n \geq N$

**S 2.3:** Sei  $b = (b_1, \dots, b_n)$  (Koordinaten von  $b$ , da  $b$  ein vektor ist). Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = b_j \ \forall 1 \leq j \leq d$

**S 2.7:**  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert  $\Leftrightarrow (a_n)_{n \geq 1}$  ist eine Cauchy-Folge; Jede beschränkte Folge hat eine konvergierende Teilfolge

### 2.7 Reihen

**D 2.1:** (*Konvergenz*)  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert falls  $(S_n)_{n \geq 1}$  (Folge von Partialsummen) konvergiert, d.h.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

**Bsp 2.2:** (*Geometrische Reihe*) Konvergiert gegen  $\frac{1}{1-q}$ , und  $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$  **Bsp 2.3:** (*Harmonische Reihe*)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert

**S 2.4:** Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergent,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann ist:

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  konvergent und  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) + \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)$
2.  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k)$  konvergent und  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)$

**S 2.5:** (Cauchy Kriterium) Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1$  mit  $|\sum_{k=n}^m a_k| \leq \varepsilon \ \forall m \geq n \geq N$

**S 2.6:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit  $a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}^*$  konvergiert  $\Leftrightarrow (S_n)_{n \geq 1}, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  ist nach oben beschränkt

**K 2.7:** (Vergleichssatz)  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  mit  $0 \leq a_k \leq b_k \ \forall k \geq K$  (wo  $K \geq 1$ ), dann gelten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

**D 2.9:** (Absolute Konvergenz) Eine Reihe für welche  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert. Eine Anwendung des Cauchy Kriteriums liefert:

**S 2.10:** Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent und  $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

## Konvergenzkriterien

$$\sum_{a=0}^{\infty} \frac{1}{a^p} \text{ konvergiert f\"ur } n > 1$$

**S 2.12:** (Leibniz) Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton fallend mit  $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dann konvergiert  $S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$  und  $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

**Usage** Um Konvergenz zu zeigen, beweise dass  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton fallend ist,  $a_n \geq 0$  und dass der Grenzwert 0 ist

**D 2.15:** (Umordnung) Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$  f\"ur eine  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  falls eine Bijektion gibt  $\phi$  so dass  $a'_n = a_{\phi(n)}$

**S 2.17:** (Dirichlet) Falls  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergiert, so konvergiert jede Umordnung der Reihe zum selben Grenzwert.

**S 2.18:** (Quotientenkriterium) Reihe  $s$  mit  $a_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$ ,  $s$  konvergiert absolut falls  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ . Falls  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$  divergiert sie. Falls einer der Grenzwerte gleich 1 ist, dann war der Test nicht eindeutig.

**S 2.19:** (Wurzelkriterium) Falls  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  konvergiert die Folge. Falls der Grenzwert gr\"osser als eins ist, divergiert sie

**K 2.20:** (Konvergenzradius) Eine Potenzreihe der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  konvergiert absolut f\"ur alle  $|z| < \rho$  und divergiert f\"ur alle  $|z| > \rho$ . Sei  $l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ , dann ist  $\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } l = 0 \\ \frac{1}{l} & \text{falls } l > 0 \end{cases}$ . Der Konvergenzradius ist dann definiert durch  $\rho$  falls  $\rho \neq \infty$

## Doppelreihen

**D 2.23:** F\"ur eine Doppelreihe  $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  ist eine **lineare Anordnung** falls eine Bijektion  $\sigma$  existiert s.d.  $b_k = a_{\sigma(k)}$

**S 2.24:** (Cauchy) Wir nehmen an,  $\exists B \geq 0$  s.d.  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \ \forall m \geq 0$ . Dann gilt:  $S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \ \forall i \geq 0$  und  $U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \ j \geq 0$  konvergieren absolute, sowie  $\sum_{i=0}^{\infty} S_i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} U_j$  und es gilt:  $\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$ . Jede lineare Anordnung konvergiert absolut mit demselben Grenzwert.

**D 2.25:** (Cauchy Produkt)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$  f\"ur zwei Folgen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$

**S 2.27:** Falls zwei Reihen absolut konvergieren, so konvergiert auch ihr Cauchy Produkt und es besteht aus den ausmultiplizierten Termen der zwei Reihen.

**S 2.28:** Sei  $f_n$  eine Folge. Wir nehmen an, dass:

- $f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j)$  existiert  $\forall j \in \mathbb{N}$

- $\exists g$  s.d.  $|f_n(j)| \leq g(j) \ \forall j, n \geq 0$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$  konvergiert

$$\text{Dann folgt } \sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

**K 2.29:** F\"ur jedes  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert die Folge und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n = \exp(z)$  wo  $\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

### 3 Stetige Funktionen

#### 3.1 Reellwertige Funktionen

**D 3.1:** (Beschränkung) Sei  $f \in \mathbb{R}^D$ , wobei  $\mathbb{R}^D$  die Menge aller Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist, d.h.  $\mathbb{R}^D$  ist ein Vektorraum

- $f$  ist **nach oben beschränkt**, falls  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  nach oben beschränkt ist.
- $f$  ist **nach unten beschränkt**, falls  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  nach unten beschränkt ist.
- $f$  ist **beschränkt** falls  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt ist.

**D 3.2:** (Monotonie) Falls  $D \subseteq \mathbb{R}$  gibt es die folgenden Monotoniebegriffe:

- **monoton wachsend**  $\forall x, y \in D \ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- **strengh monoton wachsend**, falls  $\forall x, y \in D \ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- **monoton fallend**, falls  $\forall x, y \in D \ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- **strengh monoton fallend**, falls  $\forall x, y \in D \ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- **monoton**, falls  $f$  monoton wachsend oder monoton fallend ist
- **strengh monoton**, falls  $f$  streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist

#### 3.2 Stetigkeit

**Intuition:** Eine stetige Funktion kann ohne den Stift zu heben gezeichnet werden.

**D 3.1:** (Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$ ) Falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta$  existiert, s.d.  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  **D 3.2:** (Stetigkeit)  $f$  stetig falls  $f$  in allen Punkten von  $D$  stetig ist **S 3.4:**  $f$  ist stetig in  $x_0 \iff$  für  $(a_n)_{n \geq 1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow f(a_n) = f(x_0)$

**K 3.5:** Seien  $f, g$  stetig in  $x_0$ , dann gilt  $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, f \circ g$  sind stetig in  $x_0$  und falls  $g(x_0) \neq 0$ , ist  $\frac{f}{g}$  stetig in  $x_0$  für  $\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

**D 3.6:** (Polynomiale Funktion)  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ , falls  $a_n \neq 0$ ,  $\deg(P) = n$  (Grad von  $P$ ) **K 3.7:** Sie sind stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  **K 3.8:**  $P, Q$  pol. funk. auf  $\mathbb{R}$  mit  $Q \neq 0$ , wobei  $x_1, \dots, x_m$  die Nullstellen von  $Q$  sind. Dann gilt:  $\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig

#### 3.3 Zwischenwertsatz

**S 3.1:** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $a, b \in I$ . Für jedes  $c$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  existiert ein  $z$  zwischen  $a$  und  $b$  mit  $f(z) = c$  **K 3.2:** Sei  $P$  ein Polynom mit  $\deg(P) = n$ ,  $n$  ungerade. Dann hat  $P$  mind. eine Nullstelle in  $\mathbb{R}$

#### 3.4 Min-Max-Satz

**D 3.2:** (Kompaktes Intervall) falls das Intervall  $I$  von der Form  $I = [a, b]$ ,  $a \leq b$  ist **L 3.3:**  $f, g$  stetig in  $x_0$ . Dann gilt:  $|f|, \max(f, g)$  und  $\min(f, g)$  sind stetig in  $x_0$  ( $\min(f, g)$  ist das Minimum der beiden Funktionen für jedes  $x$ ) **L 3.4:**  $(x_n)_{n \geq 1}$  konvergente Reihe in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$  und  $a \leq b$ . Falls  $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$  dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$  **S 3.5:** Sei  $f$  stetig auf dem kompakten Intervall  $I$ . Dann gilt  $\exists u \in I$  und  $\exists v \in I$  mit  $f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$ .  $f$  ist beschränkt.

#### 3.5 Satz über die Umkehrabbildung

**S 3.1:** Seien  $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D_1 \rightarrow D_2$ ,  $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D_1$ . Falls  $f$  stetig in  $x_0$ ,  $g$  auf  $f(x_0)$  dann  $f \circ g : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$

**K 3.2:** Falls in Satz 3.5.1  $f$  stetig auf  $D_1$  und  $g$  auf  $D_2$ , dann ist  $g \circ f$  stetig auf  $D_1$

**S 3.3:** (Satz über Umkehrabbildung) Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, streng monoton und sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann gilt:  $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$  ist ein Intervall und  $f^{-1} : J \rightarrow I$  ist stetig und streng monoton.

#### 3.6 Reellwertige Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  wird normalerweise durch eine auf ganz  $\mathbb{C}$  konvergente Potenzreihe definiert:  $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,

hier für  $z \in \mathbb{R}$ .  $\exp$  ist bijektiv, streng monoton wachsend, glatt und stetig.  $\exp^{-1}(x) = \ln(x)$

**S 3.1:**  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv **K 3.2:**  $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**K 3.3:**  $\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$  **K 3.4:**  $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  **K 3.5:**  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Es gilt  $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall a, b \in ]0, +\infty[$ . Dies ist die Umkehrabbildung von  $\exp$  **K 3.6:**

1. Für  $a > 0 \quad ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  ist  $x \mapsto x^a$  eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion.
2. Für  $a < 0 \quad ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  ist  $x \mapsto x^a$  eine stetige, streng monoton fallende Bijektion.
3.  $\ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0$
4.  $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0$
5.  $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0$

### 3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen

**D 3.1:** (Punktweise Konvergenz)  $(f_n)_{n \geq 1}$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  falls für alle  $x \in D$   $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

**D 3.3:** (Weierstrass) Folge  $f_n$  konv. gleichmäßig in  $D$  gegen  $f$  falls  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1$  s.d.  $\forall n \geq N, \ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

**S 3.4:**  $f_n$  ist eine Folge von (in  $D$ ) stetigen Funktionen die in  $D$  gleichmäßig konvergieren. Dann ist  $f$  (in  $D$ ) stetig

**D 3.5:** (Gleichmäßige Konvergenz von  $(f_n)_{n \geq 1}$ )  $f_n$  falls  $\forall x \in D \ f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  existiert und  $(f_n)_{n \geq 1}$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert

**K 3.6:**  $f_n$  konvergiert gleichmäßig in  $D \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1$  so dass  $\forall n, m \geq N, \ \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

**K 3.7:** Falls  $f_n$  eine gleichmäßig konvergierende Funktionenfolge ist, dann ist  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  stetig

**D 3.8:**  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  konvergiert gleichmäßig, falls  $S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$  gleichmäßig konvergiert **S 3.9:** Angenommen, dass  $|f_n(x)| \leq c_n \ \forall x \in D$  und dass  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergiert. Dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{f_n(x)}$  gleichmäßig in  $D$  und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  ist stetig in  $D$

**D 3.10:** (Konvergenzradius) Siehe **K 2.7.19** **S 3.11:** Eine Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf  $] -r, r[$  wobei  $0 \leq r < \rho$

### 3.8 Trigonometrische Funktionen

**S 3.1:**  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetige Funktionen **S 3.2:**

$$1. \exp iz = \cos(z) + i \sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$2. \cos(z) = \cos(-z) \text{ and } \sin(-z) = -\sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$3. \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$4. \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$5. \cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad z \in \mathbb{C}$$

**K 3.3:**  $\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$  and  $\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$

### 3.9 Pie (delicious)

**S 3.1:** Die Sinusfunktion hat mindestens eine Nullstelle auf  $]0, +\infty[$  und  $\pi := \inf\{t > 0 : \sin(t) = 0\}$ . Dann gilt  $\sin(\pi) = 0, \ \pi \in ]2, 4[; \forall x \in ]0, \pi[ : \sin(x) > 0$  and  $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$  **K 3.2:**  $x \geq \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq 0 \leq \sqrt{6}$  **K 3.3:**

$$1. e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$$

$$2. \sin(x + \frac{\pi}{2}), \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$5. \text{Nullstellen von Sinus} = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in ]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \sin(x) > 0 \quad \forall x \in ](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3. \sin(x + \pi) = -\sin(x), \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4. \cos(x + \pi) = -\cos(x), \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$6. \text{Nullstellen von Cosinus} = \{\frac{\pi}{2} \cdot k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in ] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \cos(x) > 0 \quad \forall x \in ] -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

### 3.10 Grenzwerte von Funktionen

**D 3.1:** (Häufungspunkt):  $x_0 \in \mathbb{R}$  von  $D$  falls  $\forall \delta > 0 \ (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$

**D 3.3:**  $A \in \mathbb{R}$  ist der Grenzwert von  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  bezeichnet  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , wobei  $x_0$  ein Häufungspunkt ist, falls:

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

**S 3.7:** Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_r$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $f : D \rightarrow E$  eine Funktion. Angenommen, dass  $y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und  $y_0 \in E$ . Falls  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  in  $y_0$  stetig ist, dann gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$

#### Links- / Rechtsseitige Grenzwerte

Wird gebraucht, wenn Funktionen Polstellen haben. Wir nähern uns der Polstelle von beiden Seiten an, um sie zu evaluieren. Anders als an der Kanti notieren wir sie mit  $x \rightarrow x_0^-$  anstelle von mit  $x \uparrow x_0$

# 4 Differenzierbare Funktionen

## 4.1 Ableiten

**D 4.1:** (Differenzierbarkeit)  $f$  ist differenzierbar in  $x_0$  falls  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  existiert.

**S 4.3:** Sei  $x_0$  Häufungspunkt von  $D$ :  $f$  differenzierbar in  $x_0 \iff \exists c \in \mathbb{R}$  und  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit (falls es zutrifft, ist  $c = f'(x_0)$  eindeutig bestimmt):

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \text{ sowie auch } r(x_0) = 0 \text{ und } r \text{ ist stetig in } x_0$$

**S 4.4:**  $f$  differenzierbar in  $x_0 \iff \exists \phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$  und  $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \forall x \in D$ . Dann ist  $\phi(x_0) = f'(x_0)$

**K 4.5:**  $x_0 \in D$  Häufungspunkt von  $D$ . Falls  $f$  differenzierbar in  $x_0$ ,  $f$  stetig in  $x_0$  **D 4.7:**  $f$  ist auf ganz  $D$  differenzierbar, falls  $f$  für jeden Häufungspunkt  $x_0$  in  $x_0$  differenzierbar ist

**S 4.10:** (Grundregeln vom Ableiten) Let  $f, g$  be functions differentiable in  $x_0$

$$\begin{aligned} \bullet (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) & \bullet \text{falls } g(x_0) \neq 0, \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \\ \bullet (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

**S 4.12:** (Kettenregel)  $x_0 \in D$  Häufungspunkt,  $f : D \rightarrow E$  differenzierbar in  $x_0$  s.d.  $y_0 := f(x_0) \in E$  ein Häufungspunkt von  $E$  ist und sei  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $y_0$ . Dann gilt  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$  und  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

**K 4.13:** Sei  $f : D \rightarrow E$  eine in  $x_0$  (Häufungspunkt) differenzierbare Bijektion  $f'(x_0) \neq 0$  und zudem sei  $f^{-1}$  stetig in  $y_0 = f(x_0)$ . Dann ist  $y_0$  ein Häufungspunkt von  $E$ ,  $f^{-1}$  differenzierbar in  $y_0$  und  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

## 4.2 Erste Ableitung: Wichtige Sätze

**D 4.1:** (1)  $f$  hat ein Maximum in  $x_0$  falls  $\exists \delta > 0$  s.d.  $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap D$  (2)  $f$  hat ein Minimum in  $x_0$  falls  $\exists \delta > 0$  s.d.  $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap D$  (3)  $f$  hat ein lokales Extremum in  $x_0$  falls es entweder ein max oder min ist

**S 4.2:** Angenommen,  $f$  is in  $x_0$  differenzierbar  $f'(x_0) = 0$ , dann existiert in  $x_0$  ein Extremum

- |  |  |
|--|--|
| 1. Falls $f'(x_0) > 0 \exists \delta > 0$ s.d. $f(x) > f(x_0) \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$ und $f(x) < f(x_0) \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$ | 2. Falls $f'(x_0) < 0 \exists \delta > 0$ s.d. $f(x) < f(x_0) \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$ und $f(x) > f(x_0) \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$ |
|--|--|

**S 4.3:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar in  $]a, b[$ . Falls  $f(a) = f(b)$ ,  $\exists \xi \in ]a, b[$  mit  $f'(\xi) = 0$

**S 4.4:** Sei  $f$  wie oben, dann  $\exists \xi \in ]a, b[$  s.t.  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$  **K 4.5:** Sei  $f, g$  wie oben ( $I = [a, b]$ ), dann gilt:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $f'(\xi) = 0 \forall \xi \in ]a, b[ \Rightarrow f$ konstant  | 5. $f'(\xi) \leq 0 \forall \xi \in ]a, b[ \Rightarrow f$ monoton fallend auf $I$   |
| 2. $f'(\xi) = g'(\xi) \forall \xi \in ]a, b[ \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c \forall x \in [a, b]$ | 6. $f'(\xi) < 0 \forall \xi \in ]a, b[ \Rightarrow f$ strikt mon. fallend auf $I$  |
| 3. $f'(\xi) \geq 0 \forall \xi \in ]a, b[ \Rightarrow f$ monoton wachsend auf $I$   | 7. Falls $\exists M \geq 0$ s.d. $ f'(\xi)  \leq M \forall \xi \in ]a, b[$ , dann gilt $\forall x_1, x_2 \in [a, b]  f(x_1) - f(x_2)  \leq M x_1 - x_2 $ |
| 4. $f'(\xi) > 0 \forall \xi \in ]a, b[ \Rightarrow f$ strikt mon. wachsend auf $I$  |  |

**S 4.10:**  $f, g, \xi$  Wie vorhin definiert. Dann gilt  $g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$ . If  $g'(x) \neq 0 x \in ]a, b[$ ,  $g(a) \neq g(b)$  and  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$  **S 4.11:** (L'Hospital)  $f, g$  wie vorhin, mit  $g'(x) \neq 0 \forall x \in ]a, b[$ . Falls  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$  und

$\lambda := \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, folgt  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  **D 4.14:**  $f$  konvex auf  $I$  falls  $\forall x \leq y \in I$  und  $\lambda \in [0, 1] f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .

**Streng konvex** falls jedes  $<$  durch  $\leq$  ersetzt wird **S 4.17:**  $f$  (wie immer) (streng) konvex  $\iff f'$  (streng) monoton wachsend. **K 4.18:** Falls  $f''$  existiert ist  $f$  (streng) konvex falls  $f'' \geq 0$  (oder  $f'' > 0$ ) auf  $]a, b[$

## 4.3 Höhere Ableitungen

### Höhere Ableitungen

### Definition 4.1

1. Für  $n \geq 2$ ,  $f$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$  falls  $f^{(n-1)}$  in  $D$  differenzierbar ist.  $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ ,  $n$ -te Ableitung von  $f$
2.  $f$  ist  $n$ -mal stetig differenzierbar in  $D$  falls  $f^{(n)}$  existiert und ist stetig in  $D$
3.  $f$  ist glatt in  $D$  falls  $\forall n \geq 1 f^{(n)}$  existiert.

**S 4.3:** (1)  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ , (2)  $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$  (binomial expansion), für  $f, g$   $n$ -mal differenzierbar

**S 4.5:**  $f, g$  wie oben; Falls  $g(x) \neq 0 \forall x \in D$ , dann ist  $\frac{f}{g}$   $n$ -mal in  $D$  differenzierbar **S 4.6:** Seien  $E, D \subseteq \mathbb{R}$  für die jeder Punkt ein Häufungspunkt ist und  $f : D \rightarrow E$  und  $g : E \rightarrow D$ , beide  $n$ -mal differenzierbar. Dann ist  $(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x)(g^{(k)} \circ f)(x)$  wobei  $A_{n,k}$  ein Polynom in den Funktionen  $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$  ist

## 4.4 Potenzreihen und Taylor Approximation

**S 4.1:** Angenommen, dass  $(f_n)_{n \geq 1}$  (für  $f_n$  und  $f'_n$  stetig differenzierbar) und  $(f'_n)_{n \geq 1}$  gleichmäßig auf  $]a, b[$  konvergieren für  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  und  $p := \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ . Dann ist  $f$  stetig differenzierbar und  $f' = p$

**S 4.2:** Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  mit  $\rho > 0$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$  auf  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  differenzierbar und  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}$

**K 4.3:** Wie in 4.4.1,  $f$  glatt auf einem konvexen Intervall und  $f^{(j)}(x) \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}$ . Insbesondere,  $c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$

**S 4.5:**  $f$  stetig,  $\exists f^{(n+1)}$ . Für jedes  $a < x \leq b \exists \xi \in ]a, x[$  mit  $f(x) \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$  **K 4.6:** (Taylor Approximation) Gleich wie oben, aber  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  anstelle von  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $c < a < d$  und  $\xi$  zwischen  $x$  und  $a$ .

**K 4.7:**  $a < x_0 < b$  und  $f$  wie zuvor, angenommen, dass  $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ . Dann gilt:

1. Falls  $n$  gerade und  $x_0$  lokales Extremum,  $f^{(n+1)}(x_0) = 0$
2. Falls  $n$  ungerade und  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ,  $x_0$  strikte lokale Minimalstelle
3. Falls  $n$  ungerade und  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ,  $x_0$  strikte lokale Maximalstelle

**K 4.8:**  $f$  2-mal differenzierbar und  $a < x_0 < b$ , wir nehmen an, dass  $f'(x_0) = 0$

1.  $f^{(2)}(x_0) > 0$ ,  $x_0$  strikte lokale Minimalstelle
2.  $f^{(2)}(x_0) < 0$ ,  $x_0$  strikte lokale Maximalstelle

## 4.5 Exercise Help

$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$	$\sum_{i=1}^{\infty} z^i = \frac{1-z^{i+1}}{1-z}$

### Häufige Grenzwerte

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^b = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^b = 1$
$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a q^x = 0$ , $\forall 0 \leq q < 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1+\frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log 1-x}{x} = -1$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$ $\forall a > 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2^x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

### Bekannte Taylorreihen

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5) \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7) \\
 \sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7) \\
 \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8) \\
 \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8) \\
 \tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7) \\
 \tanh(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7) \\
 \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \mathcal{O}(x^4) \\
 \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)
 \end{aligned}$$

# 5 Riemann Integral

## 5.1 Definition und Integrierbarkeitskriterien

**D 5.1:** (Partition) endliche Teilmenge  $P \subset I$  wo  $I = [a, b]$  und  $\{a, b\} \subseteq P$

Untersumme:  $s(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i$ ,  $f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ , Obersumme:  $S(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i$ ,  $f_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ ,  $\delta_i$  sub-interval

**L 5.2:** Sei  $P'$  eine Verfeinerung von  $P$ , dann  $s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$ ; für beliebige  $P_1, P_2$ ,  $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$

**D 5.3:**  $f$  beschränkt ist integrierbar falls  $s(f) = S(f)$  und das Integral ist  $\int_a^b f(x) dx$

**S 5.4:**  $f$  beschränkt, integrierbar  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}(I)$  mit  $S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon$  wobei  $\mathcal{P}(I)$  alle Partitionen von  $I$  ist

**S 5.9:**  $f$  integrierbar  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  s.d.  $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$ ,  $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ , wobei  $\mathcal{P}_\delta(I)$  die Menge von  $P$  wofür  $\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \leq \delta$

**K 5.10:**  $f$  integrierbar mit  $A := \int_a^b f(x) dx \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  s.d.  $\forall P \in \mathcal{P}(I)$  mit  $\delta(P) < \delta$  und  $\xi_1, \dots, \xi_n$  mit  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

und  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $\left| A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$

## 5.2 Integrierbare Funktionen

**S 5.1:**  $f, g$  beschränkt, integrierbar und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $f + g$ ,  $\lambda \cdot f$ ,  $f \cdot g$ ,  $|f|$ ,  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$  und  $\frac{f}{g}$  (falls  $|g(x)| \geq \beta > 0 \forall x \in [a, b]$  alle integrierbar) **K 5.3:** Seien  $P, Q$  Polynome,  $Q$  keine Nullstellen auf  $[a, b]$ , dann:  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$  int.

**D 5.4:** (Gleichmässige Stetigkeit) falls  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$  **S 5.6:**  $f$  stetig auf kompaktem Intervall  $I = [a, b] \implies f$  ist gleichmässig stetig auf  $I$  **S 5.7:**  $f$  stetig  $\implies f$  integrierbar **S 5.8:**  $f$  monoton  $\implies f$  integrierbar **S 5.10:**  $I \subset \mathbb{R}$  kompaktes Intervall mit  $I = [a, b]$  und  $f_1, f_2$  beschränkt, integrierbar und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt:  $\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$

## 5.3 Ungleichungen und Mittelwertsatz

**S 5.1:**  $f, g$  beschränkt, integrierbar und  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ , dann  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$  **K 5.2:** falls  $f$  beschränkt, integrierbar,  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$  **S 5.3:** Sei  $f, g$  beschränkt, integrierbar, dann  $\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$

**S 5.4:** (Mittelwertsatz)  $f$  stetig. Dann gilt  $\exists \xi \in [a, b]$  s.d.  $\int_a^b dx = f(\xi)(b-a)$  **S 5.6:** Sei  $f$  stetig,  $g$  beschränkt und integrierbar mit  $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ . Dann gilt  $\exists \xi \in [a, b]$  s.d.  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$

## 5.4 Fundamentalsatz der Differentialrechnung

### Erster Fundamentalsatz

### Satz 5.1

Sei  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist differenzierbar in  $[a, b]$  und  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

**Beweis:** Intervall aufteilen:  $\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt$ , also  $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ . Mithilfe des Mittelwertsatzes erhalten wir  $\int_{x_0}^x f(t) dt = f(\xi)(x - x_0)$  und für  $x \neq x_0$  ergibt sich  $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi)$  und da  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$  liegt und da  $f$  stetig ist,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$   $\square$

**D 5.2:** (Stammfunktion)  $F$  für  $f$  falls  $F$  differenzierbar in  $[a, b]$  ist und  $F' = f$  in  $[a, b]$

### Zweiter Fundamentalsatz

### Satz 5.3

$f$  wie in 5.4.1. Dann existiert eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  die eindeutig bestimmt ist bis auf die Integrationskonstante und

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Beweis:** Existenz von  $F$  gegeben durch 5.4.1. Falls  $F_1$  und  $F_2$  Stammfunktionen von  $f$  sind, dann  $F'_1 - F'_2 = f - f = 0$ , i.e.  $(F_1 - F_2)' = 0$ . Mithilfe von 4.2.5 (1) erhalten wir, dass  $F_1 - F_2$  konstant ist. Wir haben  $F(x) = C + \int_a^x f(t) dt$ , wobei  $C$  eine beliebige Konstante ist. Insbesondere,  $F(b) = C + \int_a^b f(t) dt$ ,  $F(a) = C$  und deshalb  $F(b) - F(a) = C + \int_a^b f(t) dt - C = \int_a^b f(t) dt$

**S 5.5:** (*Partielle Integration*)  $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$ . Aufgepasst mit Zyklen

**S 5.6:** (*Integration durch Substitution*)  $\phi$  stetig und differenzierbar. Dann gilt  $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx$

Um das Obige zu Nutzen muss die innere Funktion passend gewählt, abgeleitet und rücksubstituiert werden um eine einfacher integrierbare Funktion zu erhalten. **K 5.9:**  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

1. Sei  $a, b, c \in \mathbb{R}$  s.d. das abgeschlossenes Intervall mit Endpunkten  $a+c, b+c$  in  $I$  enthalten ist. Dann gilt

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x) dx = \int_a^b f(t+c) dt$$

2. Sei  $a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$  s.d. das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten  $ac, b$  in  $I$  enthalten ist. Dann gilt

$$\frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx = \int_a^b f(ct) dt$$

## 5.5 Integration einer konvergierenden Reihe

**S 5.1:** Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren. Dann ist  $f$  beschränkt integrierbar und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$  **K 5.2:**  $f_n$  s.d. die Reihe konvergiert. Dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)) dx$

**K 5.3:**  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_k x^k$  mit  $\rho > 0$ . Dann ist  $\forall 0 \leq r < \rho$ ,  $f$  integrierbar auf  $[-r, r]$  und  $\forall x \in [-\rho, \rho], \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$

## 5.6 Euler-McLaurin Summationsformel

**D 5.1:**  $\forall k \geq 0$ , das  $k$ -te Bernoulli Polynom  $B_k(x) = k! P_k(x)$ , wobei  $P'_k = P_{k-1} \quad \forall k \geq 1$  und  $\int_0^1 P_k(x) dx = 0 \quad \forall k \geq 1$  **D 5.2:** Sei  $B_0 = 1$ .  $\forall k \geq 2$   $B_{k-1}$  ist rekursiv durch  $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$  definiert **S 5.3:** (*McLaurin Reihe*)  $B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$  **S 5.5:**  $f$   $k$  mal stetig differenzierbar,  $k \geq 1$ . Dann gilt für  $\widetilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ B_k(x-n) & \text{für } n \leq x \leq n+1 \end{cases}$  wobei  $n \geq 1$  dass

1. Für  $k = 1$ :  $\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \widetilde{B}_1(x) f'(x) dx$  unten:  $\widetilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \widetilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx$
2. Für  $k \geq 2$ :  $\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!} (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \widetilde{R}_k, \widetilde{R}_k = \sum_{(-1)^{(k-1)}} \int_0^n \widetilde{B}_1(x) f^{(k)}(x) dx$

## 5.7 Stirling'sche Formel

**S 5.1:**  $n! = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right), |R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$  **L 5.2:**  $\forall m \geq n+1 \geq 1 : |R_3(m, n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$

## 5.8 Uneigentliche Integrale

**D 5.1:**  $f$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b]$ . Falls  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$  existiert, wir notieren als  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  und sagen  $f$  ist integrierbar auf  $[a, +\infty[$  **L 5.3:**  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b] \forall b > 0$ . Falls  $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$  und  $g(x)$  integrierbar auf  $[a, \infty[$ , dann ist  $f$  integrierbar auf  $[a, \infty[$ . Falls  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  und  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  divergiert, wie auch  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  **S 5.5:**  $f : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  monoton fallend.  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  konvergiert  $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$  konvergiert **D 5.9:** Falls  $f : [a, b]$  ist beschränkt und integrierbar auf  $[a+\varepsilon, b], \varepsilon > 0$ , aber nicht zwingend auf  $[a, b]$ , dann ist  $f$  integrierbar falls  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$  existiert, dann genannt  $\int_a^b f(x) dx$

**D 5.12:** (*Gamma function*) Für  $s > 0$  definieren wir  $\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$

**S 5.13:** (1)  $\Gamma(s)$  erfüllt  $\Gamma(1) = 1, \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$  und  $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^{\lambda} \Gamma(y)^{1-\lambda} \quad \forall x, y > 0, \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$

(2)  $\Gamma(s)$  einzige Funktion  $]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  die obige Voraussetzungen erfüllt. Außerdem:  $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} \quad \forall x > 0$

**S 5.14:** Sei  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , für alle  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gilt  $\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$

## 5.9 Partialbruchzerlegung

Wird für rationale Polynom-Funktionen genutzt. Man startet mit Aufteilen des Bruchs in (meistens) faktorisierte Teile. Suche Nullstellen. Nenner in gefundene Teile unterteilen, z.B.  $\frac{a}{x-4} + \frac{b}{x+2}$ , dann alle Brüche auf denselben Nenner bringen. Dann muss  $p(x)$  (der Zähler) des ursprünglichen Bruch gleich dem des neuen Bruchs entsprechen, also Lineares Gleichungssystem zum Finden der Koeffizienten nutzen. Den Zähler in die Form von Polynomen bringen, also z.B.  $(a+b) \cdot x + (2a-4b)$ , dann ist das SLE

$$\left| \begin{array}{l} 2 = a + b \\ -4 = 2a - b \end{array} \right| \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{4}{3} \quad \text{für unser rationales Polynom } \frac{2x-4}{x^2-2x-8}$$

Wir können dann die Koeffizienten in den aufgeteilten Bruch einsetzen (hier  $\frac{a}{x-4} \dots$ ) und wir können normal integrieren

## 6 Tabelle von Ableitungen und Stammfunktionen

Stammfunktion	Funktion	Ableitung
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x $	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$e^x$	$e^x$	$e^x$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\frac{1}{a \cdot (n+1)}(ax+b)^{n+1}$	$(ax+b)^n$	$n \cdot (ax+b)^{n-1} \cdot a$
$x \cdot (\ln x  - 1)$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	$a^x$	$a^x \cdot \ln(a)$
$\frac{x}{\ln(a)} \cdot (\ln x  - 1)$	$\log_a x $	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln \cos(x) $	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \cdot \arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\ln \sin(x) $	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\ln \cosh(x) $	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
	$\text{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
	$\text{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$\text{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

### Logarithmen

(Basiswechsel)  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$  (Potenzen)  $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$   
 (Div, Mul)  $\log_a(x \cdot (\div) y) = \log_a(x) + (-) \log_a(y)$   
 $\log_a(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{N}$

**Partielle Integration** Sollte sich ein unvermeidbarer Zyklus, wo wir immer wieder denselben Integral erhalten, bilden, können wir einfach das Integral zu beiden Seiten addieren und erhalten so 2 mal das Integral auf der linken Seite und können dann die partielle Integration auf der rechten Seite abschliessen und schliesslich durch den Faktor auf der linken Seite dividieren, um das Resultat zu erhalten.

### Umkehrfunktion der Hyperbelfunktionen

- $\text{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\text{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- $\text{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

**Komplement-Trick**  $\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d} = \frac{ax+b-(cx+d)}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}}$

### Werte der trigonometrischen Funktionen

	°	rad	$\sin(\xi)$	$\cos(\xi)$	$\tan(\xi)$
	0°	0	0	1	1
	30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
	60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
	90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\emptyset$
	120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
	135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
	150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	180°	$\pi$	0	-1	0

**Trigonometrie**  $\cot(\xi) = \frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)}$ ,  $\tan(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\cos(\xi)}$

$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty]$ ,  
 $\cosh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

- $\cos(x) = \cos(-x)$  und  $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$  und  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$$3. \sin(x + w) = \sin(x) \cos(w) + \cos(x) \sin(w)$$

$$4. \cos(x + w) = \cos(x) \cos(w) - \sin(x) \sin(w)$$

$$5. \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

$$6. \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$7. \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$$

### Weitere Ableitungen

$F(x)$	$f(x)$
$\frac{1}{a} \ln ax+b $	$\frac{1}{ax+b}$
$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln cx+d $	$\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$
$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2} \ln x+f(x) $	$\sqrt{a^2+x^2}$
$\frac{x}{2}f(x) - \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{ a }\right)$	$\sqrt{a^2-x^2}$
$\frac{x}{2}f(x) - \frac{a^2}{2} \ln x+f(x) $	$\sqrt{x^2-a^2}$
$\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$
$\arcsin\left(\frac{x}{ a }\right)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$
$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{ a }\right)$	$\frac{1}{a^2-x^2}$

$F(x)$	$f(x)$
$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$x^x$	$x^x \cdot (1 + \ln x )$
$(x^x)^x$	$(x^x)^x \cdot (x + 2x \ln x )$
$x^{(x^x)}$	$x^{(x^x)} \cdot (x^{x-1} + \ln x  \cdot x^x (1 + \ln x ))$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\sin(x)^2$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\cos(x)^2$