

## Vorwissen

### Def Geometrische Reihe

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Wobei  $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$

### Def Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

## 1 Wahrscheinlichkeitsräume

**Def Grundraum**  $\Omega$       **Elementarereignis**  $\omega \in \Omega$

**Def  $\sigma$ -Algebra**  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$       **Ereignis**  $A \in \mathcal{F}$

- (i)  $\Omega \in \mathcal{F}$
- (ii)  $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- (iii)  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

**Lem. Abgeschlossenheit** der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$
- (ii)  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
- (iii)  $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
- (iv)  $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

**Def Wahrscheinlichkeitsmass** auf  $(\Omega, \mathcal{F}) : \mathbb{P}$

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \quad \text{s.d.} \quad A \mapsto \mathbb{P}[A]$$

- (i)  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
- (ii)  $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] \iff A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{s.d.} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

**Lem. Eigenschaften** von  $\mathbb{P}$

- (i)  $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- (ii)  $\bigcap_{i=1}^k A_i = \emptyset \implies \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^k A_i\right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}[A_i]$
- (iii)  $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
- (iv)  $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

**Def Wahrscheinlichkeitsraum**  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$   $A \in \mathcal{F}, \quad \omega \in \Omega$

- $A$  tritt ein  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \omega \in A$       (i)  $\emptyset$  tritt nie ein
- $A$  tritt nicht ein  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \omega \notin A$       (ii)  $\Omega$  tritt immer ein

**Def Laplace Modell**  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$   $\Omega$  endlich.

- (i)  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- (ii)  $\forall A \in \mathcal{F} : \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$

**Lem. Nützliche Ungleichungen**

- (i)  $A \subseteq B \implies \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$  (Monotonie)
- (ii)  $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$  (Union Bound)

$A_1, A_2, \dots$  müssen *nicht* disjunkt sein.

**Lem. Stetigkeit** von  $\mathbb{P}$  gegen  $\infty$

- (i)  $\forall n : A_n \subseteq A_{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$
- (ii)  $\forall n : B_n \supseteq B_{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]$

$(A_n), (B_n)$  sind monotone Folgen von Ereignissen

### 1.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

**Def Bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$\mathbb{P}[A \mid B] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[B] > 0$

**Lem.**  $\mathbb{P}[A|A] = 1 \quad \mathbb{P}[A] > 0$

**Lem. Totale Wahrscheinlichkeit**

$$\forall A \in \mathcal{F} : \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

$B_1, \dots, B_n$  sind eine Partition von  $\Omega, \mathbb{P}[B_i] > 0$ .

**Lem. Bayes**

$$\forall i = 1, \dots, n : \quad \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j] \cdot \mathbb{P}[B_j]}$$

$B_1, \dots, B_n$  sind eine Partition von  $\Omega, \mathbb{P}[B_i] > 0, \mathbb{P}[A] > 0$ .

## 1.2 Unabhängigkeit

### Def Unabhängigkeit

$$A, B \text{ unabhängig} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

Notation  $A \perp B \stackrel{\text{def}}{\iff} A, B \text{ unabhängig}$

### Lem. Äquivalente Aussagen zur Unabhängigkeit

- (i)  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$  (Defintion)
- (ii)  $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$  ( $B$  kein Einfluss auf  $A$ )
- (iii)  $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$  ( $A$  kein Einfluss auf  $B$ )

$$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$$

### Def Unabhängigkeit für Ereignismengen

$$(A_i)_{i \in I} \text{ unabhängig} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall J \subseteq I : \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

$I$  ist eine Indexmenge. Dies muss für *alle*  $J \subseteq I$  (endlich) gelten.

## 2 Zufallsvariablen

### Def Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{s.d.} \quad \forall a \in \mathbb{R} : \left\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a \right\} \in \mathcal{F}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum

### Def Indikatorfunktion

$$\forall \omega \in \Omega : \quad \mathbb{I}_A(\omega) := \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases} \quad A \in \mathcal{F}$$

### Notation Ereignisse bezüglich Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \{X \leq a\} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a \right\} \\ \{a < X \leq b\} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leq b \right\} \\ \mathbb{P}[X \leq a] &= \mathbb{P}[\{X \leq a\}] \end{aligned}$$

### Def Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \quad F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

Notation  $\lim_{x \rightarrow a^-} F_X(a) = F(a^-) = \mathbb{P}[X < a]$

Lem.  $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

### Th. Eigenschaftern der Verteilungsfunktion

- (i)  $F_X$  monoton
- (ii)  $F_X$  rechtsstetig
- (iii)  $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{a \rightarrow \infty} F_X(a) = 1$

### Def Unabhängigkeit

$$X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} :$$

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \cdots \mathbb{P}[X_n \leq x_n]$$

### Th. Unabhängigkeit von Gruppierungen

$X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig, dann sind auch  $Y_1, \dots, Y_k$  unabhängig:

$$Y_1 = \phi_1(X_1, \dots, X_{i_1}), \dots, Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1}, \dots, X_{i_k})$$

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  sind Indizes,  $\phi_1, \dots, \phi_k$  sind Abbildungen

### Def Folgen von Zufallsvariablen

- (i) unabhängig  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall n \geq 1 : X_1, \dots, X_n$  unabhängig
- (ii) i.i.d  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  unabhängig, und  $\forall i, j : F_{X_i} = F_{X_j}$

i.i.d = Independent & identically distributed

## 2.1 Diskrete Zufallsvariablen

### Def Diskrete Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ diskret} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists (W \subset \mathbb{R}) \preceq \mathbb{N} : \quad \mathbb{P}[X \in W] = 1$$

bzw. die Werte von  $X$  liegen f.s. in  $W$

### Lem. Variablen diskreter Grundräume sind diskret

$$\Omega \preceq \mathbb{N} \implies X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist diskret}$$

### Def Verteilung diskreter Variablen

$$\left( p(x) \right)_{x \in W} \text{ s.d. } p(x) := \mathbb{P}[X = x] \text{ heisst Verteilung}$$

$X$  ist diskret mit  $W \preceq \mathbb{N}$   $p(x)$  ist *nicht*  $F_X$

Th.  $\forall p(x) : \quad \sum_{x \in W} p(x) = 1 \quad p(x) \text{ ist eine diskrete Verteilung}$

### Lem. Zur diskreten Verteilung existiert eine Variable

$$\forall \left( p(x) \right)_{x \in W} \in [0, 1] : \quad \exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), X \text{ mit Verteilung } p(x)$$

D.h man kann sagen: "Sei  $X$  eine Variable mit Verteilung  $(p(x))_{x \in W}$ "

### Th. Diskrete Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \sum_{y \leq x} p(y) \quad y \in W$$

## 2.2 Diskrete Verteilungen

**Def Bernoulli-Verteilung**  $X \sim \text{Ber}(p)$

Intuitiv: Münzwurf

$$\mathbb{P}[X = 1] = p \quad \mathbb{P}[X = 0] = 1 - p$$

$$0 \leq p \leq 1, \quad W = \{0, 1\}$$

**Def Binomial-Verteilung**  $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Intuitiv: Anzahl Erfolge bei wiederholtem Bernoulli-Experiment

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$0 \leq p \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad W = \{0, \dots, n\}$$

**Th. Bernoulli-Summen sind Binomial-verteilt**

$$S_n := X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(p, n)$$

$$0 \leq p \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad X_1, \dots, X_n \sim \text{Ber}(p) \text{ unabhängig}$$

**Lem.**  $\text{Bin}(1, p) = \text{Ber}(p)$

**Lem.**  $X_1 \sim \text{Bin}(n, p), X_2 \sim \text{Bin}(m, p) \implies X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n + m, p)$

**Def Geometrische Verteilung**  $X \sim \text{Geom}(p)$

Intuitiv: Bernoulli Experiment erfolgreich beim  $k$ -ten Versuch

$$\mathbb{P}[X = k] = p \cdot (1 - p)^{k-1}$$

$$0 < p \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}_{\neq 0}$$

**Def Negativbinomiale Verteilung**  $X \sim \text{NBin}(r, p)$

Intuitiv: Wartezeit zum  $r$ -ten Erfolg

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

$$r \in \mathbb{N}, \quad p \in [0, 1], \quad k \in \{r, r+1, \dots\}, \quad \text{Nur auf Folien}$$

**Th. Interpretation**

Für  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig s.d.  $X_i \sim \text{Ber}(p)$ :

$$T_r := \inf \left\{ n \geq 1 \mid \sum_{i=1}^n X_i = r \right\} \sim \text{NBin}(r, p)$$

**Lem.**  $X_1, X_2, \dots, X_r \sim \text{Geom}(p) \implies X := \sum_{i=1}^r X_i \sim \text{NBin}(r, p)$

**Def Hypergeometrische Verteilung**  $X \sim \text{H}(n, r, m)$

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\binom{r}{k} \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad m, r \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad k \in \{0, 1, \dots, \min(m, r)\}$$

**Th. Interpretation**

$n$  Objekte in einer Urne,  $r$  von Typ 1,  $n - r$  von Typ 2

Ziehe  $m$ , Sei  $X$  die Anzahl Objekte Typ 1, dann  $X \sim \text{H}(n, r, m)$

Das modelliert z.B. Lotto

**Def Poisson-Verteilung**

Intuitiv: Sehr seltene Ereignisse

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

**Th. Poisson-Approximation der Binomialverteilung**

$$X_n \sim \text{Bin}\left(\frac{\lambda}{n}\right), \quad N \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[N = k]$$

Intuitiv: Für grosse  $n$  haben  $X_n$  und  $N$  sehr ähnliche Eigenschaften

**Remark** Auch genannt: *Konvergenz in Verteilung, Schwache Konvergenz*  
Convergence in distribution/law, weak convergence

## 2.3 Stetige Verteilungen

**Def Stetig verteilte Zufallsvariable**  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Intuitiv:  $f_X(t)dt$  ist Die W.-keit, dass  $X$  in  $[t, t + dt]$  ist

$$\exists f_X \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{s.d.} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Stetig, da  $F_X$  somit eine stetige Funktion ist

**Remark**  $f_X$  heisst *Dichtefunktion* von  $X$

**Th. Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilung**

$F_X$  stetig, stückweise diff.-bar  $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = \infty$

$$f_X = \begin{cases} F'_X(x) & \exists k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ s.d. } x \in (x_k, x_{k+1}) \\ a_k & x \in \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \end{cases}$$

**Remark**  $f_X$  (Stetig) ist Intuitiv das Analogon zu  $p_x$  (Diskret)

**Def Gleichverteilung**  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Intuitiv: Zufälliger Punkt in  $[a, b]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Def Exponentialverteilung**  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$f_T(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lambda > 0$$

**Lem. Eigenschaften von  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$**

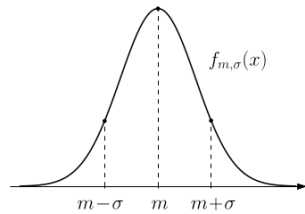
$$1. \quad \forall t \geq 0 : \quad \mathbb{P}[T > t] = e^{-\lambda t}$$

$$2. \quad \forall t, s \geq 0 : \quad \mathbb{P}[T > t + s \mid T > t] = \mathbb{P}[T > s]$$

(2) wird *Gedächtnislosigkeit* genannt.

**Def Normalverteilung**  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



**Lem. Summe von Normalverteilten ist normalverteilt**

$X_1, \dots, X_n$  unabh. s.d.  $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$

$$Z = m_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$$

$$Z \sim \mathcal{N}\left(\underbrace{m_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i}_{m_Z}, \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \sigma_i^2}_{\sigma_Z^2}\right)$$

**Def Standardnormalverteilung**

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \Phi(x) := \mathbb{P}[X \leq x]$$

**Lem. Symmetrie**  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

**Lem. Normalverteilung via**  $\mathcal{N}(0, 1)$

$Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  arbiträr,  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$Z = m + \sigma \cdot X$$

**Lem. Standardisierung**

$Z \sim \mathcal{N}(m, \rho^2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[x \leq Z] = \Phi\left(\frac{x-m}{\rho}\right)$$

### 3 Erwartungswert

**Def Erwartungswert** (nicht-negativ)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx$$

$X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega$

**Remark**  $\mathbb{E}[X]$  kann unendlich sein

**Th.**  $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \geq 0 \implies \mathbb{E}[X] \geq 0$

Gleichheit:  $\mathbb{E}[X] = 0 \iff X = 0$ , fast sicher

**Def Erwartungswert**

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-] \quad \text{falls} \quad \mathbb{E}[|X|] < \infty$$

**Remark**  $X$  kein konst. Vorzeichen, nicht  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ :  $\mathbb{E}[X]$  undefiniert

### 3.1 Diskreter Erwartungswert

**Th. Diskreter Erwartungswert**

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{w \in W} \phi(x) \cdot \mathbb{P}[X = x]$$

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $W \preccurlyeq \mathbb{N}$ ,  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Ber( $p$ )	$\mathbb{E}[X] = p$	$\mathbb{V}[X] = p(1-p)$
Poisson( $\lambda$ )	$\mathbb{E}[X] = \lambda$	$\mathbb{V}[X] = \lambda$
Bin( $n, p$ )	$\mathbb{E}[X] = n \cdot p$	$\mathbb{V}[X] = np(1-p)$
$\mathbb{I}_A$	$\mathbb{E}[\mathbb{I}_A] = \mathbb{P}[A]$	

### 3.2 Stetiger Erwartungswert

**Def Erwartungswert** (stetig)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  Dichtefunktion

**Th. Linearität**

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbb{E}[\lambda X] &= \lambda \mathbb{E}[X] \\ \text{(ii)} \quad \mathbb{E}[X + Y] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

$X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

**Th. Monotonie**

$$X \leq Y \implies \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$$

**Th. Multiplikation**

$X, Y$  unabhängig

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

**Th. Dichtefunktion bei Abbildungen**

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig, beschränkt

$$f \text{ Dichte von } X \iff \mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  s.d.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

**Th. Unabhängigkeit** (durch Abbildungen)

$\forall \phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig, beschränkt

$$X, Y \text{ unabh.} \iff \mathbb{E}[\phi(X)\psi(Y)] = \mathbb{E}[\phi(X)] \cdot \mathbb{E}[\psi(Y)]$$

Auch verallgemeinert für  $X_1, \dots, X_n$ ,  $\phi_1, \dots, \phi_n$

### 3.3 Ungleichungen

#### Th. Markov

$X \geq 0$ ,  $g : X(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$  wachsend

$$\forall c \in \mathbb{R} \text{ s.d. } g(c) > 0 : \quad \mathbb{P}[X \geq c] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(c)}$$

#### Th. Jensen

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex,  $\mathbb{E}[\phi(X)], \mathbb{E}[X]$  wohldefiniert

$$\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)]$$

#### Lem. Dreiecksungleichung

Jensen mit  $\phi(X) = |X|$  und  $\phi(X) = X^2$

$$|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|] \quad \mathbb{E}[|X|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

#### Th. Chebychev

$Y$  s.d.  $\mathbb{V}[Y] < \infty$ ,  $c > 0$

$$\mathbb{P}[|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq c] \leq \frac{\mathbb{V}[Y]}{c^2}$$

#### Th. Chernoff

### 3.4 Varianz

#### Def Varianz

$\mathbb{E}[X^2] < \infty$

$$\mathbb{V}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

#### Def Standardabweichung

$$\rho(X) := \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

Notation Auch  $\rho, \rho_X$

#### Lem. Varianz (Alternativ)

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

**Beispiel:** Bestimme  $\mathbb{E}[X^2]$ , wobei  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 & (X \sim \text{Poisson}(\lambda)) \\ \lambda &= \mathbb{E}[X^2] - \lambda^2 \\ \lambda + \lambda^2 &= \mathbb{E}[X^2] \end{aligned}$$

#### Lem. Eigenschaften

- (i)  $\mathbb{V}[X] \geq 0$
- (ii)  $\mathbb{V}[aX] = a^2 \mathbb{V}[X]$
- (iii)  $\mathbb{V}[X + a] = \mathbb{V}[X]$

#### Lem. Addition (Unabhängigkeit)

$X_1, \dots, X_n$  paarweise unabhängig

$$\mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}[X_k]$$

### 3.5 Kovarianz

#### Def Kovarianz

$X, Y$  s.d.  $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$

$$\text{cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])]$$

#### Lem. Kovarianz (Alternativ)

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Remark  $\text{cov}(X, X) = \mathbb{V}[X]$

Lem.  $X, Y$  unabh.  $\implies \text{cov}(X, Y) = 0$

Nicht umgekehrt gültig

#### Lem. Eigenschaften von cov

#### Def Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \text{cov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{cov}(X_2, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$$

## 4 Gemeinsame Verteilungen

### 4.1 Gemeinsame Diskrete Verteilung

**Def** Gemeinsame diskrete Verteilung

$X_1, \dots, X_n$  diskret,  $W_i \preccurlyeq \mathbb{N}$ ,  $X_i \in W_i$  fast sicher

$$p := \left( p(x_1, \dots, x_n) \right)_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$$

$$p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

**Th.**  $\sum_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n} p(x_1, \dots, x_n) = 1$

**Th.** Randverteilung

Die einzelnen Verteilungen  $p_X$  lassen sich extrahieren:

$\forall z \in W_i$ :

$$\mathbb{P}[X_i = z] = \sum_{x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n} p(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$X_1, \dots, X_n$  diskret, gem. Vert.  $p = \left( p(x_1, \dots, x_n) \right)_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$

**Remark** Nicht umgekehrt: Aus den Randverteilungen lässt sich nichts über die gem. Vert. schliessen.

### 4.2 Gemeinsame Stetige Verteilung

**Def** Gemeinsame Stetige Verteilung

$X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n] = \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

$f$  heisst gemeinsame Dichte von  $(X_1, \dots, X_n)$

**Th.**  $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 = 1$

Umgekehrt existiert für jedes solches  $f$  ein Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

**Beispiel:** Finde  $c$  s.d.  $f_{X,Y}$  eine Dichte ist, wobei  $f_{X,Y} = \begin{cases} ce^{-x} & 0 < x < y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^x ce^{-x} dy dx &= c \cdot \int_0^\infty xe^{-x} dx \\ &= c \cdot \left( [-xe^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx \right) \\ &= c \cdot \left( 0 + [-e^{-x}]_0^\infty \right) \\ &= c \end{aligned}$$

Also gilt wegen dem vorherigen Satz:  $c = 1$ .

**Remark** Randdichten: Integration über übrige Variablen.

**Th.** Erwartungswert

$$\mathbb{E}[\phi(X_1, \dots, X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \dots, x_n) \cdot f(x_1 \dots x_n) dx_n \dots dx_1$$

**Th.** Unabhängigkeit

$$X_1, \dots, X_n \text{ stetig, } f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

**Remark** Unabhängige stetige Variablen sind automatisch gemeinsam stetig

## 5 Grenzwertsätze

**Th.** Schwaches Gesetz der grossen Zahlen

$X_1, X_2, \dots$  unabh.,  $\forall k : \mathbb{E}[X_k] = \mu, \mathbb{V}[X_k] = \sigma^2$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n$$

Dann konvergiert  $\bar{X}_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\mu$

$$\mathbb{P}[|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Intuitiv: Die Summe konvergiert zum Erwartungswert

**Def** Konvergenz in Verteilung

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Zufallsvariablen

$$X_n \stackrel{\text{Approx.}}{\approx} X \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Falls:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n \leq x] = \mathbb{P}[X \leq x]$$

**Remark** Diskrete Zufallsvariablen können zu stetigen konvergieren.

**Th.** Zentraler Grenzwertsatz

$(X_k)_{k \geq 1}$  i.i.d s.d.  $\mathbb{E}[X_k] = \mu, \mathbb{V}[X_k] = \sigma^2, S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \right] = \Phi(x)$$

$\Phi(x)$  ist die Verteilung von  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

$$S_n \stackrel{\text{approx.}}{\approx} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

ZGS wird häufig zur Approximation von Summen verwendet

**Def** Standardisierung von  $S_n$

$$S_n^* := \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{V}[S_n]}}$$

Im Skript auch  $Z_n$

## 6 Statistik

**Notation** **Daten**  $\{x_i\}_{i=1}^n$

Klein, in Abgrenzung zu Zufallsvariablen  $X_i$

**Notation** **Parameter**  $\vartheta \in \Theta$

Unbekannt, definiert den stoch. Prozess  $\mathbb{P}_\vartheta$ , dimension undefiniert

**Def** **Schätzer**

$$T_l = t_l(X_1, \dots, X_n)$$

$t_l$  heisst Schätzfunktion, eine Auswertung  $T_l(\omega)$  heisst Schätzwert

**Def** **Erwartungstreu**

$$T \text{ Erwartungstreu} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \vartheta \in \Theta : \mathbb{E}_\vartheta[T] = \vartheta$$

**Def** **Bias**  $\mathbb{E}_\vartheta[T] - \vartheta$

**Def** **MSE**  $\text{MSE}_\vartheta[T] = \mathbb{E}_\vartheta[(T - \vartheta)^2]$