

1 Wahrscheinlichkeitsräume

Def Grundraum Ω **Elementarereignis** $\omega \in \Omega$

Def σ -Algebra $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ **Ereignis** $A \in \mathcal{F}$

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$
- (ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- (iii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

Lem. Abgeschlossenheit der σ -Algebra \mathcal{F}

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
- (ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
- (iii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
- (iv) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

Def Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F}) : \mathbb{P}$

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \quad \text{s.d.} \quad A \mapsto \mathbb{P}[A]$$

- (i) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
- (ii) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] \iff A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{s.d.} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Lem. Eigenschaften von \mathbb{P}

- (i) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- (ii) $\bigcap_{i=1}^k A_i = \emptyset \implies \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^k A_i\right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}[A_i]$
- (iii) $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
- (iv) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

Def Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $A \in \mathcal{F}, \quad \omega \in \Omega$

- A tritt ein $\stackrel{\text{def}}{\iff} \omega \in A$ (i) \emptyset tritt nie ein
- A tritt nicht ein $\stackrel{\text{def}}{\iff} \omega \notin A$ (ii) Ω tritt immer ein

Def Laplace Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Ω endlich.

- (i) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- (ii) $\forall A \in \mathcal{F} : \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Lem. Nützliche Ungleichungen

- (i) $A \subseteq B \implies \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$ (Monotonie)
- (ii) $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ (Union Bound)

A_1, A_2, \dots müssen *nicht* disjunkt sein.

Lem. Stetigkeit von \mathbb{P} gegen ∞

- (i) $\forall n : A_n \subseteq A_{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$
- (ii) $\forall n : B_n \supseteq B_{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]$

$(A_n), (B_n)$ sind monotone Folgen von Ereignissen

1.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Def Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[A \mid B] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[B] > 0$

Lem. $\mathbb{P}[A|A] = 1 \quad \mathbb{P}[A] > 0$

Lem. Totale Wahrscheinlichkeit

$$\forall A \in \mathcal{F} : \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

B_1, \dots, B_n sind eine Partition von $\Omega, \mathbb{P}[B_i] > 0$.

Lem. Bayes

$$\forall i = 1, \dots, n : \quad \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j] \cdot \mathbb{P}[B_j]}$$

B_1, \dots, B_n sind eine Partition von $\Omega, \mathbb{P}[B_i] > 0, \mathbb{P}[A] > 0$.

1.2 Unabhängigkeit

Def Unabhängigkeit

$$A, B \text{ unabhängig} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

Lem. Äquivalente Aussagen zur Unabhängigkeit

- (i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ (Defintion)
- (ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ (B kein Einfluss auf A)
- (iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ (A kein Einfluss auf B)

$A, B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$

Def Unabhängigkeit für Ereignismengen

$$(A_i)_{i \in I} \text{ unabhängig} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall J \subseteq I : \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

I ist eine Indexmenge. Dies muss für *alle* $J \subseteq I$ (endlich) gelten.

2 Zufallsvariablen

Def Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{s.d.} \quad \forall a \in \mathbb{R} : \left\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a \right\} \in \mathcal{F}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum

Def Indikatorfunktion

$$\forall \omega \in \Omega : \quad \mathbb{I}_A(\omega) := \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases} \quad A \in \mathcal{F}$$

Notation Ereignisse bezüglich Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \{X \leq a\} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a \right\} \\ \{a < X \leq b\} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leq b \right\} \\ \mathbb{P}[X \leq a] &= \mathbb{P}[\{X \leq a\}] \end{aligned}$$

Def Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \quad F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

$$\text{Notation} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} F_X(a) = F(a^-) = \mathbb{P}[X < a]$$

$$\text{Lem.} \quad \mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$

Th. Eigenschaftern der Verteilungsfunktion

- (i) F_X monoton
- (ii) F_X rechtsstetig
- (iii) $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{a \rightarrow \infty} F_X(a) = 1$

Def Unabhängigkeit

$$X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} :$$

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \cdots \mathbb{P}[X_n \leq x_n]$$

Th. Unabhängigkeit von Gruppierungen

X_1, \dots, X_n sind unabhängig, dann sind auch Y_1, \dots, Y_k unabhängig:

$$Y_1 = \phi_1(X_1, \dots, X_{i_1}), \dots, Y_k = \phi_k(X_{i_{k-1}+1}, \dots, X_{i_k})$$

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ sind Indizes, ϕ_1, \dots, ϕ_k sind Abbildungen

Def Folgen von Zufallsvariablen

- (i) unabhängig $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall n \geq 1 : X_1, \dots, X_n$ unabhängig
- (ii) i.i.d $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ unabhängig, und $\forall i, j : F_{X_i} = F_{X_j}$

i.i.d = Independent & identically distributed

2.1 Diskrete Zufallsvariablen

Def Diskrete Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ diskret} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists (W \subset \mathbb{R}) \preceq \mathbb{N} : \quad \mathbb{P}[X \in W] = 1$$

bzw. die Werte von X liegen f.s. in W

Lem. Variablen diskreter Grundräume sind diskret

$$\Omega \preceq \mathbb{N} \implies X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist diskret}$$

Def Verteilung diskreter Variablen

$$\left(p(x) \right)_{x \in W} \text{ s.d. } p(x) := \mathbb{P}[X = x] \text{ heisst Verteilung}$$

X ist diskret mit $W \preceq \mathbb{N}$ $p(x)$ ist *nicht* F_X

$$\text{Th.} \quad \forall p(x) : \quad \sum_{x \in W} p(x) = 1 \quad p(x) \text{ ist eine diskrete Verteilung}$$

Lem. Zur diskreten Verteilung existiert eine Variable

$$\forall \left(p(x) \right)_{x \in W} \in [0, 1] : \quad \exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), X \text{ mit Verteilung } p(x)$$

D.h man kann sagen: "Sei X eine Variable mit Verteilung $(p(x))_{x \in W}$ "

Th. Diskrete Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \mathbb{P}[x \leq X] = \sum_{y \leq x} p(y) \quad y \in W$$

2.2 Diskrete Verteilungen

Def Bernoulli-Verteilung $X \sim \text{Ber}(p)$

Intuitiv: Münzwurf

$$\mathbb{P}[X = 1] = p \quad \mathbb{P}[X = 0] = 1 - p$$

$$0 \leq p \leq 1, \quad W = \{0, 1\}$$

Def Binomial-Verteilung $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Intuitiv: Anzahl Erfolge bei wiederholtem Bernoulli-Experiment

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$0 \leq p \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad W = \{0, \dots, n\}$$

Th. Bernoulli-Summen sind Binomial-verteilt

$$S_n := X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$0 \leq p \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad X_1, \dots, X_n \sim \text{Ber}(p) \text{ unabhängig}$$

$$\text{Lem.} \quad \text{Bin}(1, p) = \text{Ber}(p)$$

$$\text{Lem.} \quad X_1 \sim \text{Bin}(n, p), X_2 \sim \text{Bin}(m, p) \implies X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n+m, p)$$

Def Geometrische Verteilung $X \sim \text{Geom}(p)$

Intuitiv: Bernoulli Experiment erfolgreich beim k -ten Versuch

$$\mathbb{P}[X = k] = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

$$0 < p \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}_{\neq 0}$$

Def Negativbinomiale Verteilung $X \sim \text{NBin}(r, p)$

Intuitiv: Wartezeit zum r -ten Erfolg

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

$$r \in \mathbb{N}, \quad p \in [0, 1], \quad k \in \{r, r+1, \dots\}, \quad \text{Nur auf Folien}$$

Th. Interpretation

Für X_1, X_2, \dots unabhängig s.d. $X_i \sim \text{Ber}(p)$:

$$T_r := \inf \left\{ n \geq 1 \mid \sum_{i=1}^n X_i = r \right\} \sim \text{NBin}(r, p)$$

$$\text{Lem.} \quad X_1, X_2, \dots, X_r \sim \text{Geom}(p) \implies X := \sum_{i=1}^r X_i \sim \text{NBin}(r, p)$$

Def **Hypergeometrische Verteilung** $X \sim H(n, r, m)$

$$\mathbb{P}[X = K] = \frac{\binom{r}{k} \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad m, r \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad k \in \{0, 1, \dots, \min(m, r)\}$$

Th. **Interpretation**

n Objekte in einer Urne, r von Typ 1, $n - r$ von Typ 2

Ziehe m , Sei X die Anzahl Objekte Typ 1, dann $X \sim H(n, r, m)$

Das modelliert z.B. Lotto

Def **Poisson-Verteilung**

Intuitiv: Sehr seltene Ereignisse

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Th. **Poisson-Approximation der Binomialverteilung**

$$X_n \sim \text{Bin}(\frac{\lambda}{n}), \quad N \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[N = k]$$

Intuitiv: Für grosse n haben X_n und N sehr ähnliche Eigenschaften

Remark Auch genannt: *Konvergenz in Verteilung, Schwache Konvergenz*

Convergence in distribution/law, weak convergence

2.3 Stetige Verteilungen

Def **Stetig verteilte Zufallsvariable** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Intuitiv: $f_X(t)dt$ ist Die W.-keit, dass X in $[t, t + dt]$ ist

$$\exists f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{s.d.} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Stetig, da F_X somit eine stetige Funktion ist

Remark f_X heisst *Dichtefunktion* von X

Th. **Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilung**

F_X stetig, stückweise diff.-bar $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = \infty$

$$f_X = \begin{cases} F'_X(x) & \exists k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ s.d. } x \in (x_k, x_{k+1}) \\ a_k & x \in \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \end{cases}$$

Remark f_X (Stetig) ist Intuitiv das Analogon zu p_x (Diskret)

Def **Gleichverteilung** $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Intuitiv: Zufälliger Punkt in $[a, b]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Def **Exponentialverteilung** $T \sim \exp(\lambda)$

$$f_T(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lambda > 0$$

Lem. **Eigenschaften von exp**

Def **Normalverteilung** $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Lem. **Eigenschaften von \mathcal{N}**

3 Erwartungswert

Def **Erwartungswert** (nicht-negativ)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \left(1 - F_X(x)\right) dx$$

$$X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \quad X(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

Remark $\mathbb{E}[X]$ kann unendlich sein

Th. $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \geq 0 \implies \mathbb{E}[X] \geq 0$

Gleichheit: $\mathbb{E}[X] = 0 \iff X = 0$, fast sicher

Def **Erwartungswert**

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-] \quad \text{falls} \quad \mathbb{E}[|X|] < \infty$$

Remark X kein konst. Vorzeichen, nicht $\mathbb{E}[|X|] < \infty$: $\mathbb{E}[X]$ undefiniert

3.1 Diskreter Erwartungswert

Th. **Diskreter Erwartungswert**

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{w \in W} \phi(x) \cdot \mathbb{P}[X = x]$$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad W \preceq \mathbb{N}, \quad \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Ber(p)	$\mathbb{E}[X] = p$
Poisson(λ)	$\mathbb{E}[X] = \lambda$
Bin(n, p)	$\mathbb{E}[X] = n \cdot p$
\mathbb{I}_A	$\mathbb{E}[\mathbb{I}_A] = \mathbb{P}[A]$

3.2 Stetiger Erwartungswert

Def **Erwartungswert** (stetig)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) \text{ Dichtefunktion}$$