

# Wahrscheinlichkeit und Statistik

Janis Hutz

<https://janishutz.com>

25. März 2026

## 1 Basics

### 1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

**Begriff**  $\Omega$  **Grundraum**,  $\omega \in \Omega$  **Elementarereignis**

**Def** (*Sigma-Algebra*)  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  ist  $\sigma$ -Algebra, falls:

- E1.**  $\Omega \in \mathcal{F}$
- E2.**  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$  ( $A$  Ereignis  $\Rightarrow$  nicht  $A$  auch)
- E3.**  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$   
( $A_1, \dots$  Ereignisse  $\Rightarrow A_1$  oder  $A_2$  oder  $\dots$  ein Ereignis)

**Bsp**  $\sigma$ -Algebren bei 1x Würfeln ( $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ )

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , dabei  $|\mathcal{F}| = 64$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$

Keine  $\sigma$ -Algebren sind bspw:

- $\mathcal{F} = \{\Omega\}$  (Komplementärereignis  $\emptyset$  fehlt, E2 verletzt)
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$   
(E3 verletzt, da bspw  $\{4, 5, 6\} \cup \{1\} \notin \mathcal{F}$ )

#### 1.1.1 Wahrscheinlichkeitsmass

**Def** (*W.M*)  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  mit  $A \mapsto \mathbb{P}[A]$ , notiert  $(\Omega, \mathcal{F})$ , falls folgende Eigenschaften gelten

- E1.**  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
- E2.** ( $\sigma$ -**Additivität**)  $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ , falls  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  (*disjunkte Vereinigung*)

**Bsp** Wieder mit Würfeln und  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , sind W.M:

- Abbildung  $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{6}$
- Abbildung  $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i \in A} p_i$  ( $p_i$  dabei prob. Zahl  $i$  würfeln;  $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$  ist für fairen Würfel)

#### 1.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

**Def** (*W.R*) ein Tripel  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

**Begriff**  $A$  Ereignis, **tritt (nicht) ein** (für  $\omega$ ), if  $\omega \in (\notin) A$

**Bem**  $A = \emptyset$  tritt niemals ein,  $A = \Omega$  immer.

### 1.2 Beispiele von Wahrscheinlichkeitsräumen

**Def** (*Laplace Modell*)  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sodass  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  und  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$ ,  $\mathbb{P}$  ist W.M.

**Bsp** Auf Kreis mit  $n \geq 3$  Punkten, Modell für Nachbarn ist:  $A = \{\{1, 2\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$  für  $\Omega = \{E \subseteq \{1, \dots, n\} \mid |E| = 2\}$ , also  $\mathbb{P}[A] = \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}$

**Bsp** W. 1. mal Kopf ist bei Wurf  $k$ :  $p_k = p^{k-1}(1-p)$

### 1.3 Eigenschaften/Interp. von Ereignissen

**T**  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -Algebra. Es gilt: **E4.**  $\emptyset \in \mathcal{F}$

**E5.**  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

**E6.**  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

**E7.**  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$A^C$	$A$ tritt <b>nicht</b> ein
$A \cap B$	$A$ <b>und</b> $B$ treten ein
$A \cup B$	$A$ <b>oder</b> $B$ treten ein
$A \Delta B$	entweder $A$ <b>oder</b> $B$ tritt ein
$A \subseteq B$	$B$ tritt ein, falls $A$ eintritt
$A \cap B = \emptyset$	$A$ und $B$ nicht gleichzeitig
	$\forall \omega \in \Omega$
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit	nur eines von $A_1, A_2, A_3$
$A_1, A_2, A_3$ paarw. disj.	kann eintreten

Wir wählen nicht immer  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , bspw. für mehrstufige Experimente ist dies nicht ideal (k. Filtern, Überabzählbarkeit)

### 1.4 Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsmasse

**T**  $\mathbb{P}$  Wahrscheinlichkeitsmass auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $A$  Ereignis:

- E1.** Es gilt  $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- E2. Additivität**  $k \geq 1$ ,  $A_1, \dots, A_k$  paarw. disj. Ereignisse:  
 $\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_k]$
- E3.**  $\mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$
- E4.**  $B$  Ereignis, dann  $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

#### 1.4.1 Nützliche Ungleichungen

**T** (*Monot.*)  $A, B \in \mathcal{F}$ , dann  $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

**T** (*Union Bound*) Für  $A_1, A_2, \dots$  (mögl. disj.) gilt:  $\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ . Auch für endl. n.-leere Ereignisse

### 1.4.2 Anwendungen der Ungleichungen

Sie sind nützlich für schwer zu berechnende W.

**T**  $(A_n)$  mit  $A_n \subseteq A_{n+1}$  (mon. wachsend). Dann:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n]$

und für  $(B_n)$  mit  $B_n \supseteq B_{n+1}$  (mon. fallend) gilt:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n]$

**Bem** Mit Monotonie:  $\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_{n+1}]$  und  $\mathbb{P}[B_n] \geq \mathbb{P}[B_{n+1}]$ . Grenzwerte oben wohldefiniert.

### 1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

**Def** Für  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  mit  $\mathbb{P}[B] > 0$ :

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \quad (= \mathbb{P}[A] \text{ wenn } B \text{ eingetreten ist})$$

**Bem**  $\mathbb{P}[B|B] = 1$

**T**  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ , dann ist  $\mathbb{P}[\cdot|B]$  ein W-Mass auf  $\Omega$

**T** (*Totale W.*)  $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$  mit  $B_i$ s eine Partition von  $\Omega$ , mit  $B_i$  paarw. disj. und  $\mathbb{P}[B_i] > 0 \forall 1 \leq i \leq n$ . Dann:

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

**T** (*Bayes*)  $B_i$  wie oben, dann  $\forall A$  mit  $\mathbb{P}[A] > 0$ :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

### 1.6 Unabhängigkeit

**Def**  $A, B \in \mathcal{F}$  **unabh.** falls  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

**Bem** Falls  $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$ :  $\forall B \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ . Falls  $A$  unabh. von sich selbst ( $\mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$ ), dann  $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$ . **Implik.:**  $A$  unabh. v.  $B \Leftrightarrow A$  unabh. v.  $B^C$

**T** Sei  $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$ . Dann ist equivalent:

- (i)  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$  ( $A$  und  $B$  **unabhängig**)
- (ii)  $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$  (*Eintreten von  $B$  beeinflusst  $A$  nicht*)
- (iii)  $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$  (*Eintreten von  $A$  beeinflusst  $B$  nicht*)

**Def**  $I$  eine beliebige Menge.  $(A_i)_{i \in I}$  **unabhängig** falls:

$$\forall j \subseteq I \text{ endlich} \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

## 2 Zufallsvar., Verteilungsfunktionen

### 2.1 Abstrakte Definition

**Def** (Zufallsvariable) kurz Z.V., ist  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\forall a \in \mathbb{R}$  gilt:  $f = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$  (notwendige Bedingung für Wohldefiniertheit von  $\mathbb{P}[f]$ )

**Notation** Ohne  $\omega$ :  $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$ , etc

### 2.2 Verteilungsfunktion

**Def**  $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , def:  $\forall a \in \mathbb{R} \quad F_{\mathcal{X}}(a) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \leq a]$

**T**  $a < b \in \mathbb{R}$ . Dann:  $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$

**T**  $\mathcal{X}$  Z.V. auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und V.F.  $F = F_{\mathcal{X}}$ . Eig.:

- $F$  ist monoton wachsend
- $F$  ist rechtsseitig ( $F(a) = \lim_{h \downarrow 0} F(a+h) \quad \forall a \in \mathbb{R}$ )
- $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 0$  und  $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 1$

### 2.3 Unabhängigkeit

**Def** Z.V.  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$  sind **unabh.** falls  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$   
 $\mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \leq x_1, \dots, \mathcal{X}_n \leq x_n] = \mathbb{P}[\mathcal{X}_1 \leq x_1] \cdots \mathbb{P}[\mathcal{X}_n \leq x_n]$

**Bem** Alternativ: ZVs unabhängig, falls  $\forall I_1 \subseteq \mathbb{R}, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle  $\{\mathcal{X}_1 \in I_1\}, \dots, \{\mathcal{X}_n \in I_n\}$  unabhängig

#### 2.3.1 Gruppierung

**T**  $n$  ZV  $\mathcal{X}_i$  und  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  sind indizes und  $\phi_1, \dots, \phi_k$  Abbildungen. Dann sind unabhängig:  
 $Y_1 = \phi_1(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{i_1}), \dots, Y_k = \phi_k(\mathcal{X}_{i_{k-1}+1}, \dots, \mathcal{X}_{i_k})$

#### 2.3.2 Unabhängig identisch verteilte ZV

**Def** Eine Folge von ZV ist **(1)** unabh. falls  $\mathcal{X}_i$  unabh. sind und **(2)** uiv, falls unabh. und die ZV dieselbe Verteilungsf. haben, also:  $\forall i, j \quad F_{\mathcal{X}_i} = F_{\mathcal{X}_j}$

### 2.4 Transformation von Zufallsvariablen

Da ZV Funk.  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sind, mit komposition neue ZV aus and. ZV, bspw:  $Z_1 = \exp(\mathcal{X}_1)$  oder  $Z_2 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$

### 2.5 Konstruktion von Zufallsvariablen

**Def** (Bernoulli ZV) mit param.  $p \in [0, 1]$  falls  
 $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 0] = 1 - p$  und  $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$ . Not.:  $\mathcal{X} \sim \text{Ber}(p)$

**T** ( $\exists$ -T v. Kolmogorov)  $\exists$  W-Raum und n. endl. uiv Folge von  $\mathcal{X}_i \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$

**Def** ZV  $U$  heisst **gleichverteilt auf**  $[0, 1]$ , falls

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \text{ Wir schreiben } U \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

**T**  $\mathcal{X}_i$  wie oben, da  $\mathcal{X}_i(\omega) \in \{0, 1\}$  konvergiert  $\mathcal{Y}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathcal{X}_n(\omega)$  absolut, mit  $\mathcal{Y}(\omega) \in [0, 1]$ .  $\mathcal{Y} \sim \mathcal{U}([0, 1])$

**Def** (Pseudoinverse) von  $F$  ist  $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Def:

$$\forall \alpha \in (0, 1) \quad F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\}$$

**T** (Inversionsmethode)  $F$  erfüllt eig. v. T2.4,  $U \sim \mathcal{U}(\dots)$ , dann hat ZV  $X = F^{-1}(U)$  die Verteilungsf.  $F_X = F$

**Bem**  $X$  wohldefiniert mit  $X(\omega) = F^{-1}(U(\omega))$  falls  $U(\omega) \in (0, 1)$  und  $X(\omega) = 0$  sonst.

**T**  $F_1, \dots$  Folge von Funk. mit eig. v. T2.4. Dann  $\exists$  W-Raum und Folge von unabhängigen ZV  $X_i$ , sodass:

- $\forall i \quad X_i$  has  $F_i$  (also  $\forall x \quad \mathbb{P}[X_i \leq x] = F_i(x)$ )
- $X_1, X_2, \dots$  sind unabhängig.

## 3 Diskrete und stetige ZV

### 3.1 Stetigkeit der Verteilungsfunktion

**T** (W. Punkt) Für Z.V.  $\mathcal{X}$  und V.F.  $F_{\mathcal{X}}$  gilt  $\forall a \in \mathbb{R}$   
 $\mathbb{P}[\mathcal{X} = a] = F(a) - F(a-)$  mit  $F(a-) := \lim_{h \downarrow 0} F(a-h)$ .

$\rightarrow F$  in  $a$  n. stetig, dann "Sprunghöhe"

$$F(a) - F(a-) = \mathbb{P}[\mathcal{X} = a]$$

$\rightarrow F$  stetig in  $a$ , dann  $\mathbb{P}[\mathcal{X} = a] = 0$

### 3.2 Fast sichere Ereignisse

**Def**  $A \in \mathcal{F}$  tritt **fast sicher** (f.s.) ein, falls  $\mathbb{P}[A] = 1$ .

**Bem** Für allg. Mengen:  $A$  f.s., falls  $\exists A' \subseteq A \mid \mathbb{P}[A'] = 1$

### 3.3 Diskrete Zufallsvariablen

**Def** Z.V.  $\mathcal{X}$  ist **diskret**, falls endl. oder abzählb. Menge  $W \subseteq \mathbb{R}$  existiert, s.d.  $\mathbb{P}[\mathcal{X} \in W] = 1$  (Werte v.  $\mathcal{X}$  f.s. in  $W$ )

**Bem** Falls der Grundraum  $\Omega$  endlich oder abzählbar ist, dann ist jede Z.V.  $\mathcal{X}$  diskret.

**Def** (Verteilung) Für Z.V.  $\mathcal{X}$  mit  $W$  endl. oder abzählb.

$$(p(x))_{x \in W} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in W \quad p(x) := \mathbb{P}[\mathcal{X} = x]$$

**T**  $(p(x))_{x \in W} = \sum_{x \in W} p(x) = 1$

**Bem**  $\forall (p(x))_{x \in W} \exists$  Z.V. mit dieser Verteilung. Können desh. schreiben: "Sei  $\mathcal{X}$  disk. Z.V. mit Verteilung  $(p(x))_{x \in W}$ "

#### 3.3.1 Zusammenhang Verteilung, Verteilungsfunktion

**T**  $\mathcal{X}$  disk. Z.V. wie oben, dann ist Verteilungsfunktion:  
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{\mathcal{X}}(x) = \sum_{\substack{y \in W \\ y \leq x}} p(y)$ . **Umgekehrt:**  $p(x)$  ist die "Sprunghöhe" im Punkt  $x \in W$ ,  $W$  pos. Sprünge in  $F_{\mathcal{X}}$

## 3.4 Verteilungen

### 3.4.1 Bernoulli-Verteilung

**Def**  $\mathcal{X} \sim \text{Ber}(p)$ :  $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 0] = 1 - p$  und  $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$

### 3.4.2 Binomialverteilung

**Def**  $\mathcal{X} \sim \text{Bin}(n, p)$ , falls

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

**Bem**  $\sum_{k=0}^n p(k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = (p + 1 - p)^n = 1$

**T**  $X_i \sim \text{Ber}(p_i)$  unab:  $(S_n := \sum_{i=0}^n X_i) \sim \text{Bin}(n, p)$

**Bem**  $\text{Bin}(1, p)$  ist  $\text{Ber}(p)$  verteilt. Für  $X, Y \sim \text{Bin}(n_i, p)$  mit  $X, Y$  unabhängig dann ist  $X + Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$

### 3.4.3 Geometrische Verteilung

Warten auf den ersten Erfolg (in  $\infty$  Folge von Bernoulli-Experimenten)

**Def**  $\mathcal{X} \sim \text{Geom}(p)$  mit  $W = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  falls

$$\forall k \in W \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

**Bem**  $\mathbb{P}[\mathcal{X} = 1] = p$ , da wir Konvention  $a^0 = 1$  verwenden.

**Bem**  $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$

**T**  $X_i \sim \text{Ber}(p)$  für  $i \in \mathbb{N}$ .

Dann  $(T := \min\{n \geq 1 \mid X_n = 1\}) \sim \text{Geom}(p)$

**Bem**  $T = \infty$  ist möglich,  $\mathbb{P}[T = \infty] = 0$

**T**  $T \sim \text{Geom}(p)$ , dann

$$\forall n \geq 0 \quad \forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}[T \geq n+k \mid T > n] = \mathbb{P}[T \geq k]$$

### 3.4.4 Negativbinomiale Verteilung

Warten auf den  $r$ -ten Erfolg (in  $\infty$  Folge von Bernoulli-Experimenten)

**Def**  $\mathcal{X} \sim \text{NBin}(r, p)$ , falls

$$\forall k \in \{r, r+1, \dots\} \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

**T**  $\mathcal{X}_i \sim \text{Ber}(p)$ , dann

$$T_r := \inf\{n \geq 1 \mid \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i = r\} \sim \text{NBin}(r, p)$$

**Bem**  $\mathcal{X} := \sum_{i=1}^r \mathcal{X}_i \sim \text{NBin}(r, p)$  für  $\mathcal{X}_i \sim \text{Geom}(p)$

### 3.4.5 Hypergeometrische Verteilung

$r$  Elemente vom Typ I,  $n-r$  El. vom Typ II,  $m$  davon gezogen, ohne Zurücklegen

**Def**  $\mathcal{X} \sim \text{H}(n, r, m)$ , falls

$$\forall k \in \{0, \dots, \min(m, r)\} \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \frac{\binom{r}{k} \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

### 3.4.6 Poisson-Verteilung

**Def**  $\mathcal{X} \sim \text{Poisson}(\lambda)$  mit  $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$ , falls

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[\mathcal{X} = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

**T** Für  $n \in \mathbb{N}$  Z.V.  $\mathcal{X}_i \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$  und  $\mathcal{N} \sim \text{Poisson}(\lambda)$ :  
 $\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\mathcal{X}_i = k] = \mathbb{P}[\mathcal{N} = k]$

### 3.5 Stetige Zufallsvariablen

**Def** (Stetig verteilte Z.V.)  $\mathcal{X}$  stetig, falls  $\exists f_{\mathcal{X}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , s.d. V.F.  $F_{\mathcal{X}}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\mathcal{X}}(t) dt$ .  $f_{\mathcal{X}}$  ist Dichte (pdf) von  $\mathcal{X}$

**T** Sei  $F_{\mathcal{X}}$  st. stückw. diff. auf Partition  $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \infty$ . Dann  $\mathcal{X}$  stetig, mit  $a_k$  beliebig und

$$f_{\mathcal{X}} = \begin{cases} F'_{\mathcal{X}}(x) & \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : x \in (x_k, x_{k+1}) \\ a_k & x \in \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \end{cases}$$

**Bem**  $f_{\mathcal{X}}$  fast analog zu Gew.F  $p_{\mathcal{X}}$ . Also:  $(\Sigma, p_{\mathcal{X}}) \mapsto (\int, f_{\mathcal{X}})$  vom diskreten zu stetigen Fall

### 3.6 Stetige Verteilungen

#### 3.6.1 Gleichverteilung

**Def**  $\mathcal{X} \sim \mathcal{U}([a, b])$ , falls  $f_{\mathcal{X}} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

**Bem**  $\mathbb{P}[\mathcal{X} \in [c, c+l]] = \frac{l}{b-a}$ ,  $F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$

#### 3.6.2 Exponentialverteilung

Wie Geometrische Verteilung warten auf Erfolg

**Def**  $\mathcal{X} \sim \text{Exp}(\lambda)$ , falls  $\forall x \in \mathbb{R} f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

**Bem** (Gedächtnisl.)  $\mathbb{P}[\mathcal{X} > t+s \mid \mathcal{X} > s] = \mathbb{P}[\mathcal{X} > t]$

**Bem** (Verteilungsfunktion)  $F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

#### 3.6.3 Cauchy-Verteilung

**Def**  $\mathcal{X} \sim \text{Cauchy}(x_0, \gamma)$ , falls  $f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - x_0)^2}$

**Bem** (Verteilungsfunk.)  $F_{\mathcal{X}}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)$

**Def** (Langschwänzige Verteilung) für  $|x| \rightarrow \infty$  nur sehr langsam gegen 0 (quadratisch vs. exponentiell bei Norm. V)

#### 3.6.4 Normalverteilung

**Def**  $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  falls  $f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ ,

mit  $\sigma$  Standardabweichung. Auch: Gauss'sche Verteilung

**Def** (Standardnormalverteilung)  $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ :

$$f_{\mathcal{X}} = \varphi \text{ und } \mathbb{F}_{\mathcal{X}} = \Phi = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\phi}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

**T**  $cX \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , dann  $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , also:

$$F_{\mathcal{X}}(x) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \leq x] = \mathbb{P}\left[\frac{\mathcal{X} - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

**Bsp** für Phänomene modellierbar mit Normalverteilung:

- Streuung von Messwerten um Mittelwert

- Grösse und Gewicht der Bevölkerung
- Renditen von Aktien

**Bem** Für  $\mathcal{X}_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$  unabhängig gilt:

$$\mathcal{Y} := \mu_0 + \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{X}_k \sim \mathcal{N}\left(\mu_0 + \sum_{k=1}^n a_k \mu_k, \sum_{k=1}^n a_k^2 \sigma_k^2\right)$$

**Bem** Für  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$  und  $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  gilt  $\mu + \sigma \mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  (nützlich für Simulation)

**Bem**  $\mathbb{P}[|\mathcal{X} - \mu| \geq 3\sigma] \leq 0.0027$

## 4 Erwartungswert

### 4.1 Allgemeiner Erwartungswert

**Def** Für  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \int_0^{\infty} (1 - F_{\mathcal{X}}(x)) dx$

**Bem**  $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$  immer definiert und endlich oder unendlich

**T**  $\mathcal{X}$  n.-neg. Dann:  $\mathbb{E}[\mathcal{X}] \geq 0$ . =, wenn  $\mathcal{X} = 0$  fast sicher

**Def**  $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \mathbb{E}[\mathcal{X}_+] - \mathbb{E}[\mathcal{X}_-]$  mit  $\mathcal{X}_-$  auch n.-neg.

**Bem**  $|\mathcal{X}| = \mathcal{X}_+ + \mathcal{X}_-$ . Für  $\mathcal{X} \geq 0$  ist  $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$  immer definiert. Falls  $\mathcal{X}$  kein konst. Vorzeichen,  $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$  undef.

**Bem**  $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \int_0^{\infty} (1 - F_{\mathcal{X}}(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_{\mathcal{X}}(x) dx$

### 4.2 Diskrete Zufallsvariablen

**T** Für  $\mathcal{X}$  mit Werten fast sicher in  $W$ :

$$\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \sum_{x \in W} x \cdot \mathbb{P}[\mathcal{X} = x] = \sum_{x \in W} x \cdot p_{\mathcal{X}}(x)$$

**Bem**  $\mathbb{E}[\mathcal{X}]$  wohldefiniert falls  $(x \cdot p_{\mathcal{X}}(x))_{x \in W}$  abs. konv.

#### 4.2.1 Beispiele

- $\mathcal{X} \sim \text{Ber}(p)$ :  $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = p$
- $\mathcal{X} \sim \text{Bin}(n, p)$ :  $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = np$
- $\mathcal{X} \sim \text{Poisson}(\lambda)$ :  $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \lambda$

#### 4.2.2 Transformierte Zufallsvariablen

**T** Für  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{E}[\varphi(\mathcal{X})] = \sum_{x \in W} \varphi(x) \cdot \mathbb{P}[\mathcal{X} = x]$